11-2 公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ について、初項から第 n 項までの和を S_n とする。数列 $\{S_n\}$ の最大値が $S_5=30$ であるとき、a_3 を求めよ。また、d の範囲を求めよ。

（下書き） ざっくりしたシナリオは、最大値が $S_5=30$ なので

$$\{a_n\}:\ \underbrace{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5}_{\oplus},\ \Big|\ \underbrace{a_6,a_7,a_8,\cdots}_{\ominus}$$

ここだけ足すと和は最大となる

この状態になるための条件は、$d<0$

なぜか？

もし、$d=0$ なら、$a_1=a$ とすると

$$\{a_n\}:\ \underbrace{a,a,a,a,a}_{\text{足すと}30\ =S_5},a,a,\cdots$$

$S_5=30$ より、$5a=30$ ∴ $a=6$

このとき、$\{a_n\}: 6,6,6,6,6,6,6,\cdots$

この数列は、最大値をとらない ← いくらでも和は大きくなる

or

もし、$d>0$ なら、

$$\{a_n\}:\ a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3,\cdots \underset{\oplus}{a_k},\ \underset{\oplus}{a_{k+1}},\ \underset{\oplus}{a_{k+2}}$$

ある k で $a_k>0$ となると、それ以降の項は、ずっと正である。

この数列は、最大値をとらない ← いくらでも和は大きくなる

さらに、最大値が $S_5=30$ であるとき、

$a_5=0$ か $a_6=0$ のどちらかは0でも大丈夫!!

次の①～③では、$\{S_n\}$ は、$n=5$ で最大値をとる。

$a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7$ ← $d<0$

	a_4	a_5	a_6	a_7	
①	⊕	⊕	⊖	⊖	⇒ $S_5>S_6$ より、$n=5$ で最大
②	⊕	⊕	0	⊖	⇒ $S_5=S_6$ より、$n=5$ or $n=6$ で最大
③	⊕	0	⊖	⊖	⇒ $S_4=S_5$ より、$n=4$ or $n=5$ で最大

解答

$S_5=30$ より、$\frac{1}{2}\cdot 5(a_1+a_5)=30$　　$a_5=a_1+4d$

$\frac{5}{2}(2a_1+4d)=30$

$a_1+2d=6$ …①

∴ $a_3=6$

また、$\{S_n\}$ は、$n=5$ で最大値30をとるので、$d<0$ であり、

$a_5\geqq 0$ …② かつ $a_6\leqq 0$ …③ である。

②より、$a_1+4d\geqq 0$　↓ $a_1=-2d+6$ を代入

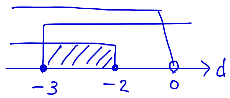
$-2d+6+4d\geqq 0$ （∵①）

$d\geqq -3$

③より、$a_1+5d\leqq 0$　↓ $a_1=-2d+6$ を代入

$-2d+6+5d\leqq 0$ （∵①）

$d\leqq -2$



よって、求める d の範囲は、$-3\leqq d\leqq -2$