三角関数の公式集

加法定理

1. ① $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　② $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
2. ① $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　② $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
3. ① $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　② $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

2 倍角の公式

1. $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$
2. $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$
3. $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

(証明)

1. $\sin 2\theta=\sin(\theta+\theta)=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$
2. $\cos 2\theta=\cos(\theta+\theta)=\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いると

$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)=2\cos^2\theta-1$

$\cos^2\theta-\sin^2\theta=(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta$

3. $\tan 2\theta=\tan(\theta+\theta)=\dfrac{\tan\theta+\tan\theta}{1-\tan\theta\tan\theta}=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

半角の公式

1. $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$　2. $\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$　3. $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(証明)

1. $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ より , $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

θ を $\dfrac{\theta}{2}$ におきかえて、$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$　…①

2. $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ より , $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

θ を $\dfrac{\theta}{2}$ におきかえて、$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$　…②

3. ①÷②より , $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

★ 半角の公式は左辺の角が右辺の角の半分なので、

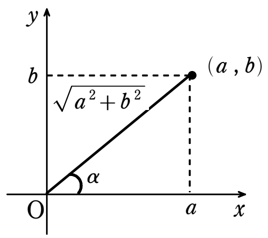
$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ や $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ も半角の公式という。

三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし　$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(証明)　下図のように、点(a, b)をとる。



$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

(終)

★ 合成は図で行うとよい。$\sin\theta$ の係数を x 軸に、$\cos\theta$ の係数を y 軸にとる。