3 項間漸化式　解答

1.［奈良県立医科大］

$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ を変形すると

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n) \quad \cdots\cdots ①$$

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=a_{n+1}-2a_n \quad \cdots\cdots ②$$

① から，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=5-3=2$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-a_n=2\cdot 2^{n-1} \quad すなわち \quad a_{n+1}-a_n=2^n \quad \cdots\cdots ③$$

② から　$a_{n+1}-2a_n=a_n-2a_{n-1}=\cdots\cdots=a_2-2a_1=5-2\cdot 3=-1$

すなわち　$a_{n+1}-2a_n=-1 \quad \cdots\cdots ④$

③ − ④ から，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=2^n+1$

別解　$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$

よって，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=5-3=2$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-a_n=2\cdot 2^{n-1} \quad すなわち \quad a_{n+1}-a_n=2^n$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が 2^n であるから，

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=3+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n+1$

$a_1=3$ であるから，これは $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=2^n+1$

2.［室蘭工業大］

(1)　$a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n$ を変形すると　$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$

$b_n=a_{n+1}-3a_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n$，　$b_1=a_2-3a_1=6-3\cdot 1=3$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列であるから，その一般項は

$$b_n=3\cdot 3^{n-1} \quad すなわち \quad b_n=3^n$$

(2)　(1) から　$a_{n+1}-3a_n=3^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると　$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}$

$c_n=\frac{a_n}{3^n}$ とおくと　$c_1=\frac{a_1}{3^1}=\frac{1}{3}$，　$c_{n+1}-c_n=\frac{1}{3}$

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 $\frac{1}{3}$，公差 $\frac{1}{3}$ の等差数列であるから，その一般項は

$$c_n=\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\frac{1}{3} \quad すなわち \quad c_n=\frac{1}{3}n$$

したがって　$\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}n$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=n\cdot 3^{n-1}$

3. ［横浜国立大］

(1) $a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2=\dfrac{2}{3}a_na_{n+1}$ ……① とおく。

① で $n=1$ のとき　$a_1{}^2=\dfrac{2}{3}a_1a_2$

$a_1=5$ を代入して　$5^2=\dfrac{2}{3}\cdot5\cdot a_2$　　よって　$a_2=\dfrac{15}{2}$

また，① で $n=2$ のとき　$a_1{}^2+a_2{}^2=\dfrac{2}{3}a_2a_3$

$a_1=5$，$a_2=\dfrac{15}{2}$ を代入して　$5^2+\left(\dfrac{15}{2}\right)^2=\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{15}{2}\right)\cdot a_3$

ゆえに　$a_3=\dfrac{65}{4}$

(2) $a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2+a_{n+1}{}^2=\dfrac{2}{3}a_{n+1}a_{n+2}$ ……②

とおく。

② − ① から　$a_{n+1}{}^2=\dfrac{2}{3}a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)$ ……③

$a_1=5\fallingdotseq 0$ であるから，すべての自然数 n について　(① の左辺)$\fallingdotseq 0$

よって，$a_na_{n+1}\fallingdotseq 0$ である。

ゆえに，すべての自然数 n について $a_n\fallingdotseq 0$ である。

③ から　$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}(a_{n+2}-a_n)$

したがって　$a_{n+2}=\dfrac{3}{2}a_{n+1}+a_n$ ……④

(3) ④ を変形して

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_{n+1}-2a_n) \quad\cdots\cdots ⑤$$

$$a_{n+2}+\frac{1}{2}a_{n+1}=2\left(a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n\right) \quad\cdots\cdots ⑥$$

⑤ より，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=-\dfrac{5}{2}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_{n+1}-2a_n=-\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=5\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad\cdots\cdots ⑦$$

⑥ より，数列 $\left\{a_{n+1}+\dfrac{1}{2}a_n\right\}$ は初項 $a_2+\dfrac{1}{2}a_1=10$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n=10\cdot2^{n-1}=5\cdot2^n \quad\cdots\cdots ⑧$$

⑧ − ⑦ から　$\dfrac{5}{2}a_n=5\cdot2^n-5\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

したがって　$a_n=2^{n+1}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$