数列　基本事項

● 等差数列の一般項と和

◎ 等差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$：a_1，a_2，a_3，……，a_n，……　において，各項に一定の数 d を加えると，次の項が得られるとき，この数列を 「**等差数列**」 といい，d をその 「 **公 差** 」 という。

　このとき，すべての自然数 n について，次の関係が成り立つ。

$$a_{n+1}=a_n+d \qquad \text{すなわち} \qquad a_{n+1}-a_n=d$$

　初項が a，公差が d である等差数列 $\{a_n\}$ の各項は，順に

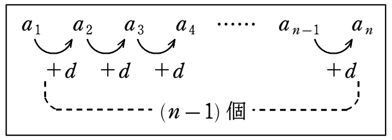
$a_1=a$

$a_2=a_1+d=a+d$

$a_3=a_2+d=a+2d$

$a_4=a_3+d=a+3d$

………



と表されるから，一般に次のことが成り立つ。

> **等差数列の一般項**
> 初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は
> $$a_n=a+(n-1)d$$

◎ 等差数列の和

初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の末項を l とし，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-d)+l$ ……①

この数列の項を逆の順に並べると

$S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+d)+a$ ……②

①＋② より，

$2S_n=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l)$

右辺は，$a+l$ を n 個加えたものなので

$2S_n=n(a+l)$

よって

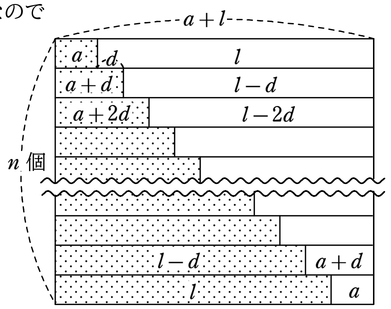
$S_n=\dfrac{1}{2}n(a+l)$ ……③

また，l は第 n 項であるから

$l=a+(n-1)d$

これを ③ に代入して

$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$



> **等差数列の和**
> 初項 a，公差 d，末項 l，項数 n の等差数列の和を S_n とすると
> $$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

●等比数列と一般項と和

◎ 等比数列と一般項

数列 $\{a_n\}$：a_1，a_2，a_3，……，a_n，……において，各項に一定の数 r を掛けると，次の項が得られるとき，この数列を「 **等比数列** 」 といい，r をその「 **公 比** 」という。

　このとき，すべての自然数 n について，次の関係が成り立つ。

$$a_{n+1}=ra_n$$

　初項 a_1 も公比 r も 0 でないとき，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r$ である。

　初項が a，公比が r である等比数列 $\{a_n\}$ の各項は，順に

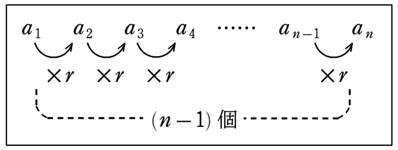
$a_1=a$

$a_2=a_1r=ar$

$a_3=a_2r=ar^2$

$a_4=a_3r=ar^3$

………



と表されるから，一般に次のことが成り立つ。

> **等比数列の一般項**
> 初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は
> $$a_n=ar^{n-1}$$

◎ 等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$S_n=a+\boxed{ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}}$ ……③

この両辺に公比 r を掛けると

$rS_n=\qquad \boxed{ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}}+ar^n$ ……④

③−④ から　　$S_n-rS_n=a-ar^n$

すなわち　　$(1-r)S_n=a(1-r^n)$

よって，$r\fallingdotseq 1$ のとき　　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

また，$r=1$ のとき　　$S_n=\underbrace{a+a+a+\cdots\cdots+a}_{n\text{ 個}}=na$

> **等比数列の和**
> 初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和を S_n とする。
> 1.　$r\fallingdotseq 1$ のとき　　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$
> 2.　$r=1$ のとき　　$S_n=na$

● Σ公式

◎ $\sum_{k=1}^{n}c$, $\sum_{k=1}^{n}k$, $\sum_{k=1}^{n}k^2$ の導出

1．$\sum_{k=1}^{n}c$

$$\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+\cdots\cdots+c}_{n\text{ 個}}=nc$$

2．$\sum_{k=1}^{n}k$

$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots\cdots+n$ は、初項 1 , 公差 1 , 項数 n の等差数列の和より 、

$\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

3．$\sum_{k=1}^{n}k^2$

$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$

　この和を求めるために，恒等式 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ を利用する。

$k=1$ とすると　　$2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1$

$k=2$ とすると　　$3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1$

$k=3$ とすると　　$4^3-3^3=3\cdot 3^2+3\cdot 3+1$

…………　　　　…………………

$k=n$ とすると　　$(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$

$$\begin{array}{rl} & \cancel{2^3}-1^3 \\ & \cancel{3^3}-\cancel{2^3} \\ & \cancel{4^3}-\cancel{3^3} \\ & \cdots\cdots \\ +) & (n+1)^3-\cancel{n^3} \\ \hline & (n+1)^3-1^3 \end{array}$$

これらの n 個の等式を辺々加えると

$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots\cdots+n)+n$

$(n+1)^3-1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n$　これに $\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ を代入して整理すると，

$3\sum_{k=1}^{n}k^2=(n+1)^3-1-\dfrac{3}{2}n(n+1)-n=\dfrac{1}{2}(n+1)\{2(n+1)^2-3n-2\}=\dfrac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$

したがって　　$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を利用すれば、

$\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ を導くことができる。（各自で確かめよ）

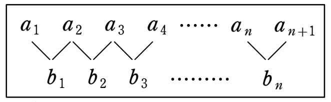
> **数列の和の公式**
> 1．$\sum_{k=1}^{n}c=nc$　　2．$\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{1}{2}n(n+1)$,
> 3．$\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　　4．$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

● 階差数列

◎ 階差数列

数列 $\{a_n\}$ の隣り合う 2 つの項の差

$b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$



を項とする数列 $\{b_n\}$ を，数列 $\{a_n\}$ の **階差数列** という。

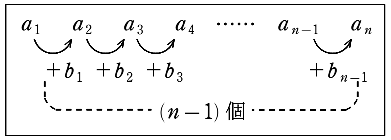
$\{a_n\}$ の各項は、等差数列の一般項の導出と同様にして、以下のように導ける。

$a_2 = a_1 + b_1$

$a_3 = a_2 + b_2 = a_1 + (b_1 + b_2)$

$a_4 = a_3 + b_3 = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3)$

…………



（図 1 ）

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots + n_{n-1}) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

等差数列の一般項 a_n を求めるには、初項 a から $(n-1)$個の公差 d を足せば、第 n 項 a_n が求まるが、どんな数列 $\{a_n\}$ も階差数列を利用すれば、等差数列のときと同様の方法で、初項 a から $(n-1)$個の階差数列の項を足せば、第 n 項 a_n が求まる（図１参照）

$a_n = a + (n-1)d$ と $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ との異なる点は $\{a_n\}$ の隣り合う 2 つの項の差が一定か一定でないかの違いしかない。

それでも、しっくりこない人は下のように、$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ を導くこともできる。

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$a_2 - a_1 = b_1$

$a_3 - a_2 = b_2$

$a_4 - a_3 = b_3$

…………

$a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$

$$\begin{array}{rl} \cancel{a_2} - a_1 & = b_1 \\ \cancel{a_3} - \cancel{a_2} & = b_2 \\ \cancel{a_4} - \cancel{a_3} & = b_3 \\ \cdots\cdots & \\ +)\ a_n - \cancel{a_{n-1}} & = b_{n-1} \\ \hline a_n - a_1 & = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots + b_{n-1} \end{array}$$

これらの $(n-1)$ 個の等式を辺々加えると，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n - a_1 = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots + b_{n-1}$$

よって　$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots + b_{n-1}) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

1．$\boldsymbol{n \geqq 2}$ のとき　$\boldsymbol{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k}$

2．$\boldsymbol{b_n = a_{n+1} - a_n}$ (階差数列の定義)