数列の復習⑤　解答

1 初項 5，公比 2，項数 6 の等比数列の和 S を求めよ。

$$S=\frac{5(2^6-1)}{2-1}=5(2^6-1)=315$$

等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n ($=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$) は
以下のように求められる.

$$\boldsymbol{S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}} \longleftarrow \frac{(\text{初項})(1-\text{公比}^{\text{項数}})}{1-(\text{公比})}$$

$$\left(S_n=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \longleftarrow \frac{(\text{初項})(\text{公比}^{\text{項数}}-1)}{(\text{公比})-1} \quad \text{でもよい}\right)$$

(公比 r について , $r\neq 1$ とする)

【説明】 S_n-rS_n を考える（ $r\neq 1$ ）

$$\begin{array}{rl}
S_n= & a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n \quad \boxed{\times r} \\
-)\ rS_n= & \quad ra_1+ra_2+\cdots+ra_{n-2}+ra_{n-1}+ra_n \\
\hline
S_n-rS_n= & a_1+(a_2-\underline{ra_1})+(a_3-\underline{ra_2})+\cdots\cdots+(a_{n-1}-\underline{ra_{n-2}})+(a_n-\underline{ra_{n-1}})-ra_n \\
= & a_1+\underbrace{\boxed{(a_2-\underline{a_2})+(a_3-\underline{a_3})+\cdots\cdots+(a_{n-1}-\underline{a_{n-1}})+(a_n-\underline{a_n})}}_{0}-ra_n
\end{array}$$

よって

$$S_n-rS_n=a_1-ra_n$$

$$(1-r)S_n=a_1-a_1r^n \quad (a_n=a_1r^{n-1} \text{ より})$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}}$$

（なお, 公比が 1 のときは数列 $\{a_n\}$ は a_1 , a_1 , a_1 , $\cdots$
となるので $S_n=\underbrace{a_1+a_1+\cdots+a_1}_{n\text{ 個}}=\boldsymbol{na_1}$ となります.）

2 次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) 初項 1，公比 6　　(2) 初項 5，公比 $\frac{1}{2}$

(3) 5，15，45，135，……　　(4) 4，-12，36，-108，……

(1) $S_n=\frac{1(6^n-1)}{6-1}=\frac{1}{5}(6^n-1)$

(2) $S_n=\frac{5\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{10\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{2\left(1-\frac{1}{2}\right)}=10\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

(3) この等比数列の初項は 5，公比は 3 である。

よって　$S_n=\frac{5(3^n-1)}{3-1}=\frac{5}{2}(3^n-1)$

(4) この等比数列の初項は 4，公比は -3 である。

よって　$S_n=\frac{4\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=\frac{4\{1-(-3)^n\}}{4}=1-(-3)^n$

3 第 2 項が 6，初項から第 3 項までの和が 21 である等比数列の初項 a と公比 r を求めよ。

条件から　$ar=6$ ……①，　$a+ar+ar^2=21$ ……②

② より　$a(1+r+r^2)=21$　この式の両辺に r を掛けると　$ar(1+r+r^2)=21r$

① を代入して　$6(1+r+r^2)=21r$　整理すると　$2r^2-5r+2=0$

すなわち　$(r-2)(2r-1)=0$　ゆえに　$r=2,\ \frac{1}{2}$

① から，$r=2$ のとき $a=3$，　$r=\frac{1}{2}$ のとき $a=12$

したがって　$a=3$，$r=2$ または $a=12$，$r=\frac{1}{2}$