偶関数と奇関数

◎ 偶関数と奇関数

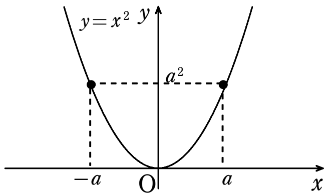
1.　偶関数

関数 $f(x)$ において、$\boldsymbol{f(x)=f(-x)}$ を満たすとき、$f(x)$ を偶関数という。

偶関数のグラフは y 軸対称である。

$f(x)=f(-x)$ が何を意味するかというと、$x=a$ のとき、$f(a)=f(-a)$ となり、$x=a$ と $x=-a$ のときの y 座標が等しいことを意味し、任意の実数 a に対し、y 軸と左右対称な点が存在する。

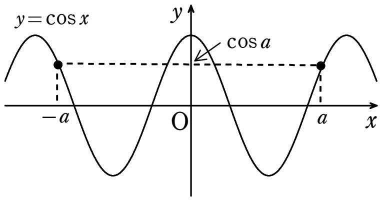
(例1)　$f(x)=x^2$



$f(x)=x^2$, $f(-x)=(-x)^2=x^2$ より

$f(x)=f(-x)$ が成り立つので、偶関数。

(例2)　$f(x)=\cos x$



$f(x)=\cos x$, $f(-x)=\cos(-x)=\cos x$ より

$f(x)=f(-x)$ が成り立つので、偶関数。

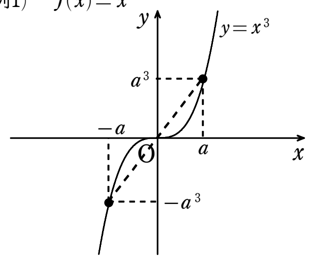
2.　奇関数

関数 $f(x)$ において、$\boldsymbol{f(x)=-f(-x)}$ を満たすとき、$f(x)$ を奇関数という。

奇関数のグラフは原点対称である。

$f(x)=f(-x)$ が何を意味するかというと、$x=a$ のとき、$f(a)=-f(-a)$ となり、$x=a$ と $x=-a$ のときの y 座標が異符号で絶対値が等しいことを意味し、任意の実数 a に対し、原点と対称な点が存在する。

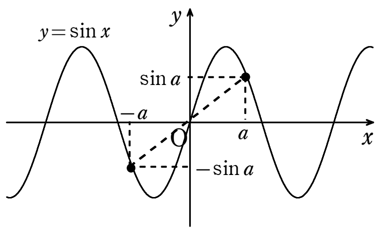
(例1)　$f(x)=x^3$



$f(x)=x^3$, $f(-x)=(-x)^3=-x^3$ より

$f(x)=-f(-x)$ が成り立つので、奇関数である。

(例2)　$f(x)=\sin x$

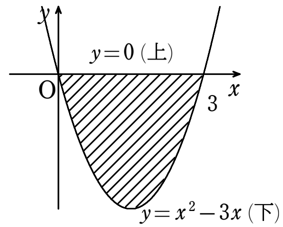


$f(x)=\sin x$, $f(-x)=\sin(-x)=-\sin x$ より、

$f(x)=-f(-x)$ が成り立つので、奇関数である。

◎ 定積分とは

$y=x^2-3x$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めると、



$$S=\int_0^3\{0-(x^2-3x)\}dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

しかし、誤って、面積を求めるのにも関わらず、

(上の関数)−(下の関数) をせずに積分をしてしまうと、

$\displaystyle\int_0^3(x^2-3x)dx=\left[\frac{1}{3}x^2-\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=-\frac{9}{2}$ となり、マイナスの面積が出てきてしまう。

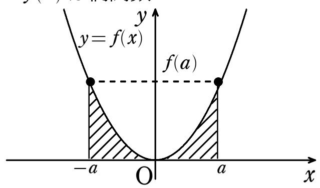
このとき、$0\leqq x\leqq 3$ の範囲では、$x^2-3x\leqq 0$ であり、負の関数を積分してしまっている。つまり、関数の符号(±)を考慮せず、定積分の計算をすると符号（プラスorマイナス）付きの面積が出てくると思えばよい。通常の定積分の計算は積分区間で「(上の関数)−(下の関数)」という作業をしない。つまり、負の関数のまま計算することもあるので値が負であることもありえる。「面積を求めよ」と問われたら、積分区間でグラフの上下を判断して、「(上の関数)−(下の関数)」(実は長方形の縦の長さ)で積分される関数を正(プラス)の状態にして積分しなければならない。まとめると、定積分は**「符号つき面積」**を表す。

◎ 定積分の計算の工夫

1. $f(x)$ が**偶関数**のとき、$\displaystyle\int_{-a}^{a}\boldsymbol{f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx}$

2. $f(x)$ が**奇関数**のとき、$\displaystyle\int_{-a}^{a}\boldsymbol{f(x)dx=0}$

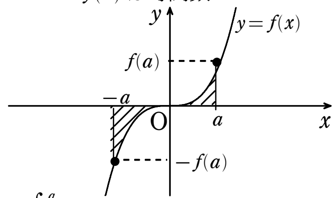
1. $f(x)$ は偶関数



$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

斜線部の面積は $-a\leqq x\leqq 0$ と $0\leqq x\leqq a$ で同符号より、0 から a までの面積の 2 倍で求まる。

2.　$f(x)$ は奇関数



$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$　←(上−下)を無視

斜線部の面積は $-a\leqq x\leqq 0$ と $0\leqq x\leqq a$ で異符号より、打ち消しあって、0 になる。