数と式　演習プリント　解答

1．［札幌学院大］

$(\text{与式})=\{(x^2+y^2)+xy\}\{(x^2+y^2)-xy\}(x^4-x^2y^2+y^4)$
$=\{(x^2+y^2)^2-(xy)^2\}(x^4-x^2y^2+y^4)$
$=(x^4+x^2y^2+y^4)(x^4-x^2y^2+y^4)=\{(x^4+y^4)+x^2y^2\}\{(x^4+y^4)-x^2y^2\}$
$=(x^4+y^4)^2-(x^2y^2)^2=x^8+x^4y^4+y^8$

2．［京都産業大］

(1)　$(\text{与式})=(x^2-2xy-3y^2)z-2(x^2-2xy-3y^2)$
$=(x^2-2xy-3y^2)(z-2)$
$=(x+y)(x-3y)(z-2)$

(2)　$(\text{与式})=6x^2+(-11y-1)x+3y^2-2y-1$
$=6x^2+(-11y-1)x+(y-1)(3y+1)$
$=\{2x-(3y+1)\}\{3x-(y-1)\}$
$=(2x-3y-1)(3x-y+1)$

$$\begin{array}{ccccc}1 & \times & -1 & \longrightarrow & -3\\ 3 & & 1 & \longrightarrow & 1\\ \hline 3 & & -1 & & -2\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}2 & \times & -(3y+1) & \longrightarrow & -9y-3\\ 3 & & -(y-1) & \longrightarrow & -2y+2\\ \hline 6 & & (y-1)(3y+1) & & -11y-1\end{array}$$

(3)　$(\text{与式})=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+(b^2c-bc^2)$
$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

3．［(1) 佛教大　(2) 秋田大］

(1)　$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)-84=(x-1)(x+3)\times(x-2)(x+4)-84$
$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)-84$
$=(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24-84$
$=(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)-60$
$=\{(x^2+2x)-15\}\{(x^2+2x)+4\}$
$=(x-3)(x+5)(x^2+2x+4)$

(2)　$4x^4+7x^2+16=4(x^2+2)^2-9x^2=\{2(x^2+2)+3x\}\{2(x^2+2)-3x\}$
$=(2x^2+3x+4)(2x^2-3x+4)$

4．［大阪経済大］

$x=1.\dot{2}\dot{7}$ とおく。
$x=1.2727\cdots\cdots$ であるから　$100x=127.2727\cdots\cdots$
よって　$100x-x=126$　　ゆえに　$x=\dfrac{126}{99}=\dfrac{{}^{\text{ア}}14}{{}^{\text{イ}}11}$
また，$y=0.4\dot{1}\dot{8}$ とおくと　$10y=4.1818\cdots\cdots$，$1000y=418.1818\cdots\cdots$
よって　$1000y-10y=414$　　ゆえに　$y=\dfrac{414}{990}=\dfrac{23}{55}$
したがって　$1.\dot{2}\dot{7}-0.4\dot{1}\dot{8}=\dfrac{14}{11}-\dfrac{23}{55}=\dfrac{{}^{\text{ウ}}47}{{}^{\text{エ}}55}$

5．［駒澤大］

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\dfrac{1}{x}=(2\sqrt{7})^2-2={}^{\text{ア}}26$

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=(2\sqrt{7})^3-3\cdot2\sqrt{7}={}^{\text{イ}}50\sqrt{{}^{\text{ウ}}7}$

$x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}=26^2-2={}^{\text{エ}}674$

$x^5+\dfrac{1}{x^5}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=26\cdot50\sqrt{7}-2\sqrt{7}={}^{\text{オ}}1298\sqrt{{}^{\text{カ}}7}$

6．［防衛医科大学校］

(a)　$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$
よって　$a+b=(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)={}^{\text{ア}}2\sqrt{2}$
$ab=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=2-1={}^{\text{イ}}1$
(b)　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(2\sqrt{2})^2-2\cdot1=8-2={}^{\text{ウ}}6$
$a-b=(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)=2$
であるから　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=2\sqrt{2}\cdot2={}^{\text{エ}}4\sqrt{2}$
(c)　$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=6^2-2\cdot1^2=36-2=34$
$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=6\cdot4\sqrt{2}=24\sqrt{2}$
よって　$a^8+b^8=(a^4+b^4)^2-2a^4b^4=(34)^2-2\cdot1^4=1156-2={}^{\text{オ}}1154$
$a^8-b^8=(a^4+b^4)(a^4-b^4)=34\cdot24\sqrt{2}={}^{\text{カ}}816\sqrt{2}$

7．［東北学院大］

$\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}}$
$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$

8．［東北学院大］

(1)　$3^2<14<4^2$ より　$3<\sqrt{14}<4$
よって　$a=3$，$b=\sqrt{14}-a=\sqrt{14}-3$
(2)　$\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{\sqrt{14}-3}=\dfrac{\sqrt{14}+3}{(\sqrt{14}-3)(\sqrt{14}+3)}=\dfrac{\sqrt{14}+3}{5}$
$3<\sqrt{14}<4$ より　$6<\sqrt{14}+3<7$
よって　$\dfrac{6}{5}<\dfrac{\sqrt{14}+3}{5}<\dfrac{7}{5}$
$\dfrac{6}{5}=1.2$，$\dfrac{7}{5}=1.4$ であるから　$c=1$
ゆえに　$d=\dfrac{\sqrt{14}+3}{5}-c=\dfrac{\sqrt{14}-2}{5}$

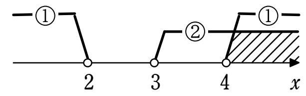
9．［星薬科大］

$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(4+3)+2\sqrt{4\cdot3}}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$
$1<\sqrt{3}<2$ であるから　$3<2+\sqrt{3}<4$
よって　$a=3$
$b=(2+\sqrt{3})-a=(2+\sqrt{3})-3=\sqrt{3}-1$

したがって　$\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a+b-1}=\dfrac{3}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{3+(\sqrt{3}-1)-1}$
$=\dfrac{3(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}-\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$
$=\dfrac{3\sqrt{3}+3-(3-2\sqrt{3}+1)}{3-1}=\dfrac{{}^{\text{ア}}5\sqrt{{}^{\text{イ}}3}-{}^{\text{ウ}}1}{{}^{\text{エ}}2}$

10．［広島工業大］

$|x-3|>1$ から　$x-3<-1$，$1<x-3$
ゆえに　$x<2$，$4<x$　……①
$2(4-x)+1<3(x-2)$ から　$15<5x$
ゆえに　$x>3$　……②
①，② の共通範囲を求めて　$x>4$



11．［神奈川大］

[1]　$x<\dfrac{5}{3}$ のとき　$-(3x-5)<2x+1$　　よって　$-3x+5<2x+1$
これを解いて　$x>\dfrac{4}{5}$
$x<\dfrac{5}{3}$ との共通範囲を求めて　$\dfrac{4}{5}<x<\dfrac{5}{3}$
[2]　$x\geqq\dfrac{5}{3}$ のとき　$3x-5<2x+1$
これを解いて　$x<6$
$x\geqq\dfrac{5}{3}$ との共通範囲を求めて　$\dfrac{5}{3}\leqq x<6$
[1]，[2] より　$\dfrac{4}{5}<x<6$

12．［近畿大］

$\sqrt{x^2}=|x|$，$\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$ であるから，方程式は
$|x|+|x-2|=x+5$　……①
[1]　$x<0$ のとき，① は　$-x-(x-2)=x+5$
これを解くと　$x=-1$
これは $x<0$ を満たす。
[2]　$0\leqq x<2$ のとき，① は　$x-(x-2)=x+5$
これを解くと　$x=-3$
これは $0\leqq x<2$ を満たさない。
[3]　$x\geqq2$ のとき，① は　$x+x-2=x+5$
これを解くと　$x=7$
これは $x\geqq2$ を満たす。
以上から，求める解は　$x={}^{\text{ア}}-1$，${}^{\text{イ}}7$（(ア)，(イ) は順不同）

数と式　演習プリント　解答

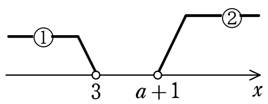
13．［京都産業大］

$x-2<\dfrac{2x-3}{3}$ から　　$3x-6<2x-3$　　　よって　　$x<3$　……①

$2(x+1)>x+a+3$ から　　$x>a+1$　……②

したがって，① かつ ② を満たす実数 x が存在しないための条件は　　$a+1\geqq 3$

ゆえに　　$a\geqq 2$



14．［北里大］

$5-x\leqq 4x<2x+k$ より　　$5-x\leqq 4x$　かつ　$4x<2x+k$

すなわち　　$1\leqq x$　かつ　$x<\dfrac{k}{2}$

よって，$k>2$ のとき　　ア $1\leqq x<\dfrac{k}{2}$

また，これを満たす整数 x がちょうど5つ存在するとき，その整数 x は

$x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

よって　　$5<\dfrac{k}{2}\leqq 6$　　　すなわち　　イ $10<k\leqq 12$

15．［広島修道大］

$A\cap B=\{5,\ 9\}$ より $9\in A$ であるから　　$a^2=9$　……①

同様に $5\in B$ であるから　　$a-1=5$　……②　または　$a+b=5$　……③

① から　　$a=\pm 3$

これらは ② を満たさない。

$a=3$ のとき，③ から　　$b=2$

このとき $A=\{2,\ 5,\ 9\}$，$B=\{4,\ 2,\ 5,\ 9\}$ であるから，$2\in A\cap B$ となり不適。

$a=-3$ のとき，③ から　　$b=8$

このとき $A=\{2,\ 5,\ 9\}$，$B=\{4,\ -4,\ 5,\ 9\}$ となり，適する。

よって　　$a=-3$，$b=8$

また　　$A\cup B=\{-4,\ 2,\ 4,\ 5,\ 9\}$

16．［日本女子大］

(1)　$m+n$ が 2 で割り切れないとき，m，n のうち一方が奇数で他方が偶数であり，mn は 2 で割り切れる。

よって，正しいから　　○

(2)　mn が 2 で割り切れないとき，m，n はともに奇数であり，$m+n$ は 2 で割り切れる。

よって，誤っているから　　×

(3)　$m+n$ が 2 で割り切れるとき，m，n はともに奇数，または，m，n はともに偶数であり，m，n がともに奇数のとき mn は 2 で割り切れない。

よって，誤っているから　　×

別解　(3) は (2) の対偶であるから，命題の真偽は一致する。

よって　　×

17．［鹿児島大］

逆は「$a=0$ かつ $b=0$ ならば，$ab=0$」で，真である。

対偶は「$a\neq 0$ または $b\neq 0$ ならば，$ab\neq 0$」で，偽 (反例：$a=1$，$b=0$) である。

18．［東京慈恵会医科大］

「x，y はともに整数」ならば「$x+y$，xy はともに整数」は真である。

「$x+y$，xy はともに整数」ならば「x，y はともに整数」は偽である。

(反例：$x=\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{2}$)

よって，「x，y はともに整数」は「$x+y$，xy はともに整数」であるための十分条件であるが，必要条件ではない。(ア ②)

「$x+y>2$ かつ $xy>1$」ならば「$x>1$ かつ $y>1$」は偽である。

(反例：$x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{5}{2}$)

「$x>1$ かつ $y>1$」ならば「$x+y>2$ かつ $xy>1$」は真である。

よって，「$x+y>2$ かつ $xy>1$」は「$x>1$ かつ $y>1$」であるための必要条件であるが，十分条件ではない。(イ ①)

19．［金沢工業大］

$|3x-5|\leqq 2$ より　　$-2\leqq 3x-5\leqq 2$

すなわち　　　$1\leqq x\leqq\dfrac{7}{3}$

したがって，$p\Longrightarrow q$ は偽，$q\Longrightarrow p$ は真である。

よって，p は q であるための必要条件であるが，十分条件ではない (ア ③)

q は p であるための十分条件であるが，必要条件ではない (イ ④)

$-5\leqq 2-3x\leqq -1$ より　　$1\leqq x\leqq\dfrac{7}{3}$

したがって，$q\Longrightarrow r$，$r\Longrightarrow q$ はいずれも真である。

よって，r は q であるための必要十分条件である (ウ ①)

20．［西南学院大］

(1)　対偶「m が奇数ならば，m^2 は奇数である」が真であることを示す。

m が奇数のとき，$m=2k+1$ (k は整数) と表されるから

$$m^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$$

$2k^2+2k$ は整数であるから，$2(2k^2+2k)+1$ は奇数である。

よって，m^2 は奇数である。

対偶が真であるから，もとの命題も真である。

(2)　$\sqrt{2}$ が無理数でないとすると，$\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$ (p，q は互いに素である自然数) と表される。

このとき　　$\dfrac{q^2}{p^2}=2$　　　すなわち　　$q^2=2p^2$

よって，q^2 は偶数である。

ゆえに，(1) より q は偶数であるから，$q=2r$ (r は自然数) と表される。

このとき　　$(2r)^2=2p^2$　　　すなわち　　$p^2=2r^2$

よって，p^2 は偶数である。

ゆえに，(1) より p は偶数となるが，これは p と q が互いに素であることに矛盾する。

したがって，背理法により $\sqrt{2}$ は無理数である。