

図形と方程式 演習プリント

1. [名城大]

平面上に点 A (1, -2) と点 B (4, 3) がある。直線 $l: y = x$ に関して点 A と対称な点の座標は $\begin{matrix} \text{ア} \\ \square \end{matrix}$ である。また、点 P が l 上を動くとき、線分 AP と線分 BP の長さの和が最小になるのは、点 P の座標が $\begin{matrix} \text{イ} \\ \square \end{matrix}$ のときである。

2. [近畿大]

座標平面上の 2 直線 $(k-2)x + (4k+3)y - 2k + 15 = 0$ ……①, $x + 2y + 3 = 0$ ……② を考える。ただし、 k は定数とする。① は k の値に関係なく定点 A $\left(\begin{matrix} \text{ア} \\ \square \end{matrix}, \begin{matrix} \text{イ} \\ \square \end{matrix}\right)$ を通る。

(1) ① と ② が直交するとき、 $k = \frac{\begin{matrix} \text{ウ} \\ \square \end{matrix}}{\begin{matrix} \text{エ} \\ \square \end{matrix}}$ である。

(2) A と ② の距離は $\frac{\begin{matrix} \text{キ} \\ \square \end{matrix} \sqrt{\begin{matrix} \text{ク} \\ \square \end{matrix}}}{\begin{matrix} \text{ケ} \\ \square \end{matrix}}$ である。

(3) ① と ② が平行であるとき、 $k = \frac{\begin{matrix} \text{コ} \\ \square \end{matrix}}{\begin{matrix} \text{サ} \\ \square \end{matrix}}$ である。

3. [立命館大]

点 (7, 1) を通り、円 $x^2 + y^2 = 25$ に接する直線の方程式は、 $\begin{matrix} \text{ア} \\ \square \end{matrix}x + \begin{matrix} \text{イ} \\ \square \end{matrix}y = 25$, $\begin{matrix} \text{ウ} \\ \square \end{matrix}x - \begin{matrix} \text{エ} \\ \square \end{matrix}y = 25$ となり、接点の座標は x 座標の小さい方からそれぞれ $\begin{matrix} \text{オ} \\ \square \end{matrix}$, $\begin{matrix} \text{カ} \\ \square \end{matrix}$ である。また、この 2 つの接点と点 (7, 1) を通る円の方程式は、 $(x - \begin{matrix} \text{キ} \\ \square \end{matrix})^2 + (y - \begin{matrix} \text{ク} \\ \square \end{matrix})^2 = \begin{matrix} \text{ケ} \\ \square \end{matrix}$ である。

4. [大阪経済大]

円 $C: x^2 - 4x + y^2 - 4y - 17 = 0$ と直線 $l: y = x + 1$ について、以下の空欄を適宜埋めよ。

(1) C の中心は $\left(\begin{matrix} \text{ア} \\ \square \end{matrix}, \begin{matrix} \text{イ} \\ \square \end{matrix}\right)$ であり、半径は $\begin{matrix} \text{ウ} \\ \square \end{matrix}$ である。

(2) C の接線で傾きが $\frac{3}{4}$ であるものは $y = \frac{3}{4}x + \frac{\begin{matrix} \text{エ} \\ \square \end{matrix}}{\begin{matrix} \text{オ} \\ \square \end{matrix}}$, $y = \frac{3}{4}x - \frac{\begin{matrix} \text{カ} \\ \square \end{matrix}}{\begin{matrix} \text{キ} \\ \square \end{matrix}}$ である。

(3) C が l から切り取る線分の長さは $\begin{matrix} \text{ク} \\ \square \end{matrix} \sqrt{\begin{matrix} \text{ケ} \\ \square \end{matrix}}$ である。

(4) C を x 軸方向に -5 , y 軸方向に 5 平行移動した円は

$(x + \begin{matrix} \text{コ} \\ \square \end{matrix})^2 + (y - \begin{matrix} \text{サ} \\ \square \end{matrix})^2 = \begin{matrix} \text{ソ} \\ \square \end{matrix}$ と表され、この円周上の点と l 上の

点との距離の最小値は $\frac{\begin{matrix} \text{シ} \\ \square \end{matrix} \sqrt{\begin{matrix} \text{ス} \\ \square \end{matrix}}}{\begin{matrix} \text{セ} \\ \square \end{matrix}} - \begin{matrix} \text{ソ} \\ \square \end{matrix}$ である。

5. [立命館大]

座標平面において、原点 O, 点 A (5, 5), 点 B (1, 7) の 3 点がある。△OAB の内心、外心、垂心の座標を求めよ。 カキは少し難しいので飛ばしてもよい

(1) △OAB において、辺 OA の長さは $\begin{matrix} \text{ア} \\ \square \end{matrix}$ であり、辺 OB の長さは $\begin{matrix} \text{イ} \\ \square \end{matrix}$ である。∠BOA の二等分線の方程式は、 $y = \begin{matrix} \text{ウ} \\ \square \end{matrix}$ である。△OAB の面積は $\begin{matrix} \text{エ} \\ \square \end{matrix}$ であり、内接円の半径は $\begin{matrix} \text{オ} \\ \square \end{matrix}$ である。

したがって、△OAB の内心の座標は $\left(\begin{matrix} \text{カ} \\ \square \end{matrix}, \begin{matrix} \text{キ} \\ \square \end{matrix}\right)$ である。

(2) 辺 OA の垂直二等分線の方程式は、 $y = \begin{matrix} \text{ク} \\ \square \end{matrix}$ であり、△OAB の外心の座標は $\left(\begin{matrix} \text{ケ} \\ \square \end{matrix}, \begin{matrix} \text{コ} \\ \square \end{matrix}\right)$ である。

(3) △OAB の垂心の座標は、 $\left(\begin{matrix} \text{サ} \\ \square \end{matrix}, \begin{matrix} \text{シ} \\ \square \end{matrix}\right)$ である。

6. [名城大]

a を正の定数とする。座標平面において、円 K_1 は中心が A ($a, 2$) であり、 x 軸および直線 $l: 3x - 4y + 9 = 0$ に接している。

- K_1 の半径を求めよ。
- a の値を求めよ。
- l と x 軸の交点を B, K_1 と x 軸の接点を C とするとき、3 点 A, B, C を通る円 K_2 の方程式を求めよ。
- (3) で求めた K_2 と K_1 の 2 つの交点および原点を通る円 K_3 の方程式を求めよ。

7. [中央大]

a を定数とする。座標平面で、方程式 $(x-a)^2 + y^2 = 1$ が表す円を C とする。また、方程式 $x = 0$ が表す直線を L_1 とし、方程式 $y = x - 1$ が表す直線を L_2 とする。

- 円 C が 2 直線 L_1, L_2 の両方と共有点をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。
- 直線 L_1 のうち円 C が切り取る線分の長さを l_1 とし、直線 L_2 のうち円 C が切り取る線分の長さを l_2 とする。 a が (1) で求めた範囲を動くとき、 l_1, l_2 をそれぞれ a を用いて表せ。
- a が (1) で求めた範囲を動くとき、 $l_1^2 + l_2^2$ の最大値と、そのときの a の値を求めよ。

8. [慶応義塾大]

円 $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 25 = 0$ を C_1 とし、中心が原点で、円 C_1 に外接する円を C_2 とする。このとき、円 C_2 の半径は $\begin{matrix} \text{ア} \\ \square \end{matrix}$ である。また、2 つの円 C_1, C_2 の共有点の座標は $\begin{matrix} \text{イ} \\ \square \end{matrix}$ である。

9. [近畿大]

座標平面において、次の式で与えられる 2 つの円 C, C' を考える。

$$C: x^2 + y^2 = 13, C': x^2 + y^2 - 8x + 14y + 13 = 0$$

2 つの円の 2 つの共通接線は、点 $\left(\begin{matrix} \text{ア} \\ \square \end{matrix}, \begin{matrix} \text{イ} \\ \square \end{matrix}\right)$ で交わり、共通接線 l_1, l_2 の方程式は、それぞれ $l_1: \begin{matrix} \text{ウ} \\ \square \end{matrix}x + \begin{matrix} \text{エ} \\ \square \end{matrix}y = 13, l_2: \begin{matrix} \text{オ} \\ \square \end{matrix}x + y = \begin{matrix} \text{カ} \\ \square \end{matrix}$ である。

10. [東北工業大]

2 次関数 $y = x^2 + (2k - 10)x - 4k + 16$ ($k \geq 0$) のグラフについて考える。

- $k = 0$ のとき、頂点の座標を求めよ。
- x 軸と 2 つの共有点を持ち、それらの間の距離が 8 のとき k の値を求めよ。
- k が変化するとき、頂点の軌跡を求めよ。

11. [龍谷大]

点 A (-1, 0) を通り、傾きが a の直線を l とする。放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ と直線 l は、異なる

2 点 P, Q で交わっている。

- 傾き a の値の範囲を求めよ。
- 線分 PQ の中点 R の座標を a を用いて表せ。
- 点 R の軌跡を xy 平面にかけ。

12. [福島大]

次の方程式で表される 2 つの直線 l_1, l_2 を考える。

$$l_1: (a-1)(x+1) - (a+1)y = 0, l_2: ax - y - 1 = 0$$

- l_1 は a の値によらず定点を通る。この定点の座標を求めよ。
- a が実数全体を動くときの、 l_1 と l_2 の交点の軌跡を求めよ。

13. [関西学院大]

x, y が 3 つの不等式 $y \geq -\frac{5}{3}x + 5, y \geq 3x - 9, y \leq \frac{1}{5}x + 5$ を満たすとすると、このと

き、 $x + y$ の最小値は $\begin{matrix} \text{ア} \\ \square \end{matrix}$ であり、最大値は $\begin{matrix} \text{イ} \\ \square \end{matrix}$ である。また、 $x^2 + y^2$ の最小値は $\begin{matrix} \text{ウ} \\ \square \end{matrix}$ であり、そのときの x, y の値は $x = \begin{matrix} \text{エ} \\ \square \end{matrix}, y = \begin{matrix} \text{オ} \\ \square \end{matrix}$ である。

14. [福島大]

次の問いに答えよ。

- 連立不等式 $\begin{cases} y \leq -x^2 + 4 \\ y \geq -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$ の表す領域を図示せよ。
- 点 (x, y) が (1) の領域を動くとき、 $x + y$ のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。