図形と方程式　演習プリント

１．［名城大］

平面上に点 A$(1,\ -2)$ と点 B$(4,\ 3)$ がある。直線 $\ell : y=x$ に関して点 A と対称な点の座標は $\boxed{\text{ア}}$ である。また，点 P が ℓ 上を動くとき，線分 AP と線分 BP の長さの和が最小になるのは，点 P の座標が $\boxed{\text{イ}}$ のときである。

２．［近畿大］

座標平面上の 2 直線 $(k-2)x+(4k+3)y-2k+15=0$ ……①，$x+2y+3=0$ ……② を考える。ただし，k は定数とする。① は k の値に関係なく定点 A$\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ を通る。

(1) ① と ② が直交するとき，$k=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2) A と ② の距離は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(3) ① と ② が平行であるとき，$k=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

３．［立命館大］

点 $(7,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式は，$\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}y=25$，$\boxed{\text{ウ}}x-\boxed{\text{エ}}y=25$ となり，接点の座標は x 座標の小さい方からそれぞれ $\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ である。また，この 2 つの接点と点 $(7,\ 1)$ を通る円の方程式は，$\left(x-\boxed{\text{キ}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{ク}}\right)^2=\boxed{\text{ケ}}$ である。

４．［大阪経済大］

円 $C : x^2-4x+y^2-4y-17=0$ と直線 $\ell : y=x+1$ について，以下の空欄を適宜埋めよ。

(1) C の中心は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ であり，半径は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) C の接線で傾きが $\dfrac{3}{4}$ であるものは $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$，$y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(3) C が ℓ から切り取る線分の長さは $\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(4) C を x 軸方向に -5，y 軸方向に 5 平行移動した円は $\left(x+\boxed{\text{コ}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{サ}}\right)^2=\boxed{\text{ウ}}^2$ と表され，この円周上の点と ℓ 上の点との距離の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}-\boxed{\text{ソ}}$ である。

５．［立命館大］

座標平面において，原点 O，点 A$(5,\ 5)$，点 B$(1,\ 7)$ の 3 点がある。△OAB の内心，外心，垂心の座標を求めよ。　$\boxed{\text{カキは少し難しいので飛ばしてもよい}}$

(1) △OAB において，辺 OA の長さは $\boxed{\text{ア}}$ であり，辺 OB の長さは $\boxed{\text{イ}}$ である。∠BOA の二等分線の方程式は，$y=\boxed{\text{ウ}}$ である。△OAB の面積は $\boxed{\text{エ}}$ であり，内接円の半径は $\boxed{\text{オ}}$ である。

したがって，△OAB の内心の座標は $\left(\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}}\right)$ である。

(2) 辺 OA の垂直二等分線の方程式は，$y=\boxed{\text{ク}}$ であり，△OAB の外心の座標は $\left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$ である。

(3) △OAB の垂心の座標は，$\left(\boxed{\text{サ}},\ \boxed{\text{シ}}\right)$ である。

６．［名城大］

a を正の定数とする。座標平面において，円 K_1 は中心が A$(a,\ 2)$ であり，x 軸および直線 $\ell : 3x-4y+9=0$ に接している。

(1) K_1 の半径を求めよ。

(2) a の値を求めよ。

(3) ℓ と x 軸の交点を B，K_1 と x 軸の接点を C とするとき，3 点 A，B，C を通る円 K_2 の方程式を求めよ。

(4) (3) で求めた K_2 と K_1 の 2 つの交点および原点を通る円 K_3 の方程式を求めよ。

７．［中央大］

a を定数とする。座標平面で，方程式 $(x-a)^2+y^2=1$ が表す円を C とする。
また，方程式 $x=0$ が表す直線を L_1 とし，方程式 $y=x-1$ が表す直線を L_2 とする。

(1) 円 C が 2 直線 L_1，L_2 の両方と共有点をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) 直線 L_1 のうち円 C が切り取る線分の長さを l_1 とし，直線 L_2 のうち円 C が切り取る線分の長さを l_2 とする。a が (1) で求めた範囲を動くとき，l_1，l_2 をそれぞれ a を用いて表せ。

(3) a が (1) で求めた範囲を動くとき，${l_1}^2+{l_2}^2$ の最大値と，そのときの a の値を求めよ。

８．［慶応義塾大］

円 $x^2+y^2-6x+12y+25=0$ を C_1 とし，中心が原点で，円 C_1 に外接する円を C_2 とする。このとき，円 C_2 の半径は $\boxed{\text{ア}}$ である。また，2 つの円 C_1，C_2 の共有点の座標は $\boxed{\text{イ}}$ である。

９．［近畿大］

座標平面において，次の式で与えられる 2 つの円 C，C' を考える。

$C : x^2+y^2=13$，$C' : x^2+y^2-8x+14y+13=0$

2 つの円の 2 つの共通接線は，点 $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ で交わり，共通接線 ℓ_1，ℓ_2 の方程式は，それぞれ　$\ell_1 : \boxed{\text{ウ}}x+\boxed{\text{エ}}y=13$，$\ell_2 : \boxed{\text{オ}}x+y=\boxed{\text{カ}}$ である。

10．［東北工業大］

2 次関数 $y=x^2+(2k-10)x-4k+16$ $(k\geqq 0)$ のグラフについて考える。

(1) $k=0$ のとき，頂点の座標を求めよ。

(2) x 軸と 2 つの共有点をもち，それらの間の距離が 8 のとき k の値を求めよ。

(3) k が変化するとき，頂点の軌跡を求めよ。

11．［龍谷大］

点 A$(-1,\ 0)$ を通り，傾きが a の直線を ℓ とする。放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ と直線 ℓ は，異なる 2 点 P，Q で交わっている。

(1) 傾き a の値の範囲を求めよ。

(2) 線分 PQ の中点 R の座標を a を用いて表せ。

(3) 点 R の軌跡を xy 平面にかけ。

12．［福島大］

次の方程式で表される 2 つの直線 ℓ_1，ℓ_2 を考える。

$\ell_1 : (a-1)(x+1)-(a+1)y=0$　，$\ell_2 : ax-y-1=0$

(1) ℓ_1 は a の値によらず定点を通る。この定点の座標を求めよ。

(2) a が実数全体を動くときの，ℓ_1 と ℓ_2 の交点の軌跡を求めよ。

13．［関西学院大］

x，y が 3 つの不等式 $y\geqq -\dfrac{5}{3}x+5$，$y\geqq 3x-9$，$y\leqq \dfrac{1}{5}x+5$ を満たすとする。このとき，$x+y$ の最小値は $\boxed{\text{ア}}$ であり，最大値は $\boxed{\text{イ}}$ である。また，x^2+y^2 の最小値は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，そのときの x，y の値は $x=\boxed{\text{エ}}$，$y=\boxed{\text{オ}}$ である。

14．［福島大］

次の問いに答えよ。

(1) 連立不等式 $\begin{cases} y\leqq -x^2+4 \\ y\geqq -\dfrac{1}{2}x+1 \end{cases}$ の表す領域を図示せよ。

(2) 点 $(x,\ y)$ が (1) の領域を動くとき，$x+y$ のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。