

複素数

◎ 複素数

1. 虚数 i の定義: 「ア. $i^2 = -1$ 」あるいは「イ. $i = \sqrt{-1}$ 」
2. 複素数 x ... 実数 a, b と虚数単位 i を用いて、「ウ. $x = a + bi$ 」で表せる数
3. 複素数 () $\begin{cases} \text{実数 ()} \\ \text{虚数 ()}, \text{純虚数 ()} \end{cases}$
4. 複素数 $a + bi$ について、 a を「エ. 実部 」、 b を「オ. 虚部 」という
5. 2つの複素数 $a + bi, a - bi$ を互いに「カ. 共役 」という。
6. 虚数を数直線上にとることはできない。
つまり、虚数には「キ. $<$ 」が存在しない。
(虚数と不等号は、一緒に使うことはない)

7. 実数係数の2次方程式と判別式

a, b, c を実数とする。

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を D とする。

1. 「ク. $D > 0$ 」 \Leftrightarrow 異なる2つの実数解をもつ
2. 「ケ. $D = 0$ 」 \Leftrightarrow 重解をもつ
3. 「コ. $D < 0$ 」 \Leftrightarrow 異なる2つの虚数解をもつ

◎ $D/4$ について。

$D = b^2 - 4ac$ であり、 $b' = \frac{b}{2}$ とおくと $b = 2b'$ となる。

$b = 2b' \Rightarrow D = b^2 - 4ac$ に代入すると。

$$D = 4b'^2 - 4ac \quad \therefore D/4 = b'^2 - ac$$

8. 虚数係数の2次方程式

虚数係数の2次方程式では、基本的に「解の公式」と「判別式」を使わない。「使えない」くらいの気持ちで大丈夫

説明

(例1)

$$x^2 - ix - 2 = 0 \text{ の判別式を } D \text{ とすると、} D = (-i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = -1 + 8 = 7 > 0$$

ちなみに、解の公式で解を求めると、 $x = \frac{i \pm \sqrt{7}}{2}$ である。

$D > 0$ なのに、異なる2つの虚数解となっていて、いつもの $\sqrt{\quad}$ が使えない。

(例2)

$$x^2 - x + 1 + i = 0 \text{ の判別式を } D \text{ とすると、} D = 1 - 4(1 + i) = -3 - 4i$$

i には大小関係が存在しないため、 $D > 0, D = 0, D < 0$ のいずれでもない。

ちなみに、解の公式で解を求めると、 $x = \frac{1 \pm \sqrt{-3-4i}}{2}$ である。

数学的に根号内に i が残ってはいけないわけではないが、

実は、 $\frac{1 \pm \sqrt{-3-4i}}{2}$ は頑張って計算すると、 i と $1-i$ となる。

根号内に i が残ると i の処理は、大変であると思っておけばよい。