指数関数　基本事項

◎ 指数の 0 や負の整数への拡張

指数 n が 0 や負の整数のとき，累乗 a^n を考えてみよう。
たとえば，n が正の整数のとき，
2^n の値は指数 n が 1 増えるごとに 2 倍になる。
逆に，指数 n が 1 減るごとに $\frac{1}{2}$ 倍になる。

	$\times 2$		$\times 2$		$\times 2$	
2^1		2^2		2^3		2^4
॥		॥		॥		॥
2		4		8		16
	$\times\frac{1}{2}$		$\times\frac{1}{2}$		$\times\frac{1}{2}$	

指数	-3	-2	-1	0	1	2
	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$
累乗	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2
	॥	॥	॥	॥	॥	॥
	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
	$\times\frac{1}{2}$	$\times\frac{1}{2}$	$\times\frac{1}{2}$	$\times\frac{1}{2}$	$\times\frac{1}{2}$	$\times\frac{1}{2}$

一般に，指数が 0 や負の整数の場合の累乗を，次のように定める。

指数が 0 や負の整数の場合の累乗

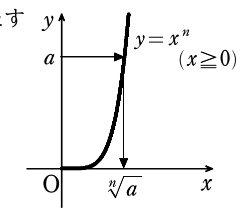
$a \fallingdotseq 0$ で，n が正の整数のとき　$a^0=1$，$a^{-1}=\dfrac{1}{a}$，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

◎ 累乗根

n を正の整数とするとき，n 乗すると a になる数，すなわち $x^n=a$ となる数 x を，a の **n 乗根** という。例えば

$2^4=16$，$(-2)^4=16$ であるから，2 と -2 は 16 の 4 乗根
$(-3)^5=-243$ であるから，-3 は -243 の 5 乗根　　　　である。

以下では，正の数 a の n 乗根のうち，正であるものについて考える。
右の図からわかるように，正の数 a に対して，$x^n=a$ を満たす正の数 x がただ 1 つ定まる。これを $\sqrt[n]{a}$ で表す。
また，$\sqrt[n]{0}=0$ である。
【注意】$\sqrt[2]{a}$ はこれまで通り $\sqrt{a}$ で表す。



$a>0$，n が正の整数のとき，次のことが成り立つ。

$$\sqrt[n]{a}>0,\quad (\sqrt[n]{a})^n=a,\quad \sqrt[n]{a^n}=a$$

平方根の場合と同様に，累乗根について次のことが成り立つ。

累乗根の性質

$a>0$，$b>0$ で，m，n を正の整数とする。

1　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　　2　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

3　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　　　4　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

◎ 指数の有理数への拡張

正の数 a に対して，指数が有理数のときも指数法則 $(a^x)^y=a^{xy}$ が成り立つ。

$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m=a^n$　と　$(\sqrt[m]{a^n})^m=a^n$ であることから、$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$　である。

そこで，指数が有理数の場合の累乗を，次のように定める。

指数が有理数の場合の累乗

$a>0$ で，m，n を正の整数，r を正の有理数とする。

1．$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}=(\sqrt[m]{a})^n$　　特に　$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

2．$a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$

一般に、次の指数法則が成り立つ。

指数法則

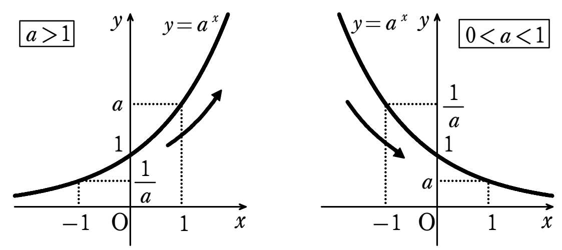
$a>0$, $b>0$ で , x , y が有理数のとき

1．$a^x\times a^y=a^{x+y}$　　　2．$a^x\div a^y=\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

3．$(a^x)^y=a^{xy}$　　　4．$(ab)^x=a^xb^x$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$

◎ 指数関数のグラフ

一般に，指数関数 $y=a^x$ のグラフは，次のようになる。



1　グラフは x 軸を漸近線とし，点 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る。
2　グラフは，$a>1$ のとき右上がり，$0<a<1$ のとき右下がりである。

グラフからわかるように，指数関数 $y=a^x$ には，次の性質がある。

指数関数 $y=a^x$ の性質

1　定義域は実数全体，値域は正の数全体である。
2　$a>1$ **のとき**　x の値が増加すると y の値も増加する。

$$p<q \iff a^p<a^q$$

$0<a<1$ **のとき**　x の値が増加すると y の値は減少する。

$$p<q \iff a^p>a^q$$

【注意】　$a>0$，$a \fallingdotseq 1$ のとき「$p=q \iff a^p=a^q$」が成り立つ。