整数の性質　演習プリント

16題＋5題(16題を何回も繰り返し解きましょう。余裕のある人は後半5題も繰り返し解いて身に着けよう。)

１．［佛教大］

$16200=2^3\cdot3^4\cdot5^2$

よって，16200の正の約数の個数は　$(3+1)(4+1)(2+1)={}^{ア}60$ (個)

また，約数のうち奇数であるものは，$3^4\cdot5^2$ の約数であるから，その総和は

$(1+3+3^2+3^3+3^4)(1+5+5^2)={}^{イ}3751$

２．［慶応義塾大］

$12^n=(2^2\cdot3)^n=2^{2n}\cdot3^n$ であるから，12^n の正の約数が28個のとき

$(2n+1)(n+1)=28$

整理すると　$2n^2+3n-27=0$　すなわち　$(2n+9)(n-3)=0$

n は自然数であるから　$n=3$

３．［大同大］

$8!=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$

$=2^3\cdot7\cdot(2\cdot3)\cdot5\cdot2^2\cdot3\cdot2\cdot1$

$=2^7\cdot(3^2\cdot5\cdot7)=2^7\cdot315$

$8!=2^a(2b-1)$ で，$2b-1$ は奇数であるから　$2^a=2^7$，$2b-1=315$

ゆえに　$a={}^{ア}7$，$b={}^{イ}158$

1から32までの自然数のうち

2の倍数の個数は，32を2で割った商で　16

2^2 の倍数の個数は，32を 2^2 で割った商で　8

2^3 の倍数の個数は，32を 2^3 で割った商で　4

2^4 の倍数の個数は，32を 2^4 で割った商で　2

2^5 の倍数の個数は，32を 2^5 で割った商で　1

よって，32! は素因数2を $16+8+4+2+1=31$ (個) もつ。

$32!=2^c(2d-1)$ で，$2d-1$ は奇数であるから　$c={}^{ウ}31$

同様に，1から50までの自然数のうち

2の倍数の個数は，50を2で割った商で　25

2^2 の倍数の個数は，50を 2^2 で割った商で　12

2^3 の倍数の個数は，50を 2^3 で割った商で　6

2^4 の倍数の個数は，50を 2^4 で割った商で　3

2^5 の倍数の個数は，50を 2^5 で割った商で　1

よって，50! は素因数2を $25+12+6+3+1=47$ (個) もつ。

したがって，50! が 2^n で割り切れるような自然数 n の最大値は　${}^{エ}47$

４．［大阪経済大］

求める分数を $\dfrac{b}{a}$ (a，b は互いに素な自然数) とする。

$\dfrac{104}{21}\times\dfrac{b}{a}$ が自然数となることから　a は104の約数，b は21の倍数　……①

$\dfrac{182}{15}\times\dfrac{b}{a}$ が自然数となることから　a は182の約数，b は15の倍数　……②

求める分数 $\dfrac{b}{a}$ を最小にするには，a を最大にし，b を最小にすればよい。

よって，①，②から

a は104と182の最大公約数，b は21と15の最小公倍数

である。

$104=2^3\cdot13$，$182=2\cdot7\cdot13$ であるから，104と182の最大公約数は　$2\cdot13=26$

$21=3\cdot7$，$15=3\cdot5$ であるから，21と15の最小公倍数は　$3\cdot5\cdot7=105$

したがって　$a=26$，$b=105$

ゆえに，求める分数は　$\dfrac{{}^{ア}105}{{}^{イ}26}$

５．［大阪経済大］

x と y の最大公約数が8であるから，x と y は $x=8a$，$y=8b$ と表される。

ただし，a と b は互いに素で，$a<b$ である。

このとき，x と y の最小公倍数は $8ab$ であるから

$8ab=240$　すなわち　$ab=30$

$ab=30$，$a<b$ を満たし，互いに素である a，b の組は

$(a,\ b)=(1,\ 30),\ (2,\ 15),\ (3,\ 10),\ (5,\ 6)$

よって，条件を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ は全部で ${}^{ア}4$ 組ある。

$x+y=8(a+b)$ であるから，$x+y$ が最も小さくなるのは，$a+b$ が最も小さいとき，

すなわち $(a,\ b)=(5,\ 6)$ のときで，このとき　$(x,\ y)=({}^{イ}40,\ {}^{ウ}48)$

６．［(1)　広島修道大　(2) 東京電機大］］

(1)　$2n-1$ と $2n+1$ の最大公約数を g とすると

$2n-1=ga$，$2n+1=gb$　(a，b は互いに素である自然数)

と表される。この2式から n を消去して　$2=g(b-a)$

$2n-1<2n+1$ より $b-a>0$ であり，g，a，b は自然数であるから

$g=1$ または 2

$2n-1$，$2n+1$ は奇数であるから g も奇数である。よって　$g=1$

ゆえに，$2n-1$ と $2n+1$ の最大公約数は1であるから，$2n-1$ と $2n+1$ は互いに素である。

(2)　求める2つの自然数を a，b ($a<b$) とする。

最小公倍数が60であるから，a と b は60の正の約数である。

60の正の約数は　1，2，3，4，5，6，10，12，15，20，30，60

これと和が22であることから　$(a,\ b)=(2,\ 20),\ (10,\ 12)$

$(a,\ b)=(2,\ 20)$ のとき，a と b の最小公倍数は20となり，不適。

$(a,\ b)=(10,\ 12)$ のとき，a と b の最小公倍数は60となり，適する。

以上から，求める2つの自然数は　10，12

７．［広島修道大］

(1)　$8633=6052\cdot1+2581$

$6052=2581\cdot2+890$

$2581=890\cdot2+801$

$890=801\cdot1+89$

$801=89\cdot9$

よって，ユークリッドの互除法により，最大公約数は　89

(2)　与式の両辺を89で割ると　$97x+68y=12$　……①

$97=68\cdot1+29$

$68=29\cdot2+10$

$29=10\cdot2+9$

$10=9\cdot1+1$

よって　$1=10-9\cdot1=10-(29-10\cdot2)\cdot1=10\cdot3+29\cdot(-1)$

$=(68-29\cdot2)\cdot3+29\cdot(-1)=68\cdot3+29\cdot(-7)$

$=68\cdot3+(97-68\cdot1)\cdot(-7)=97\cdot(-7)+68\cdot10$

ゆえに　$12\{97\cdot(-7)+68\cdot10\}=12$　すなわち　$97\cdot(-84)+68\cdot120=12$

これを①から引き整理すると　$97(x+84)=-68(y-120)$

97と68は互いに素であるから，k を整数として，$x+84=68k$，$-(y-120)=97k$　と表される。

したがって，解は　$x=68k-84$，$y=-97k+120$　(k は整数)

８．［名城大］

(1)　71と33で互除法を用いると

$71=33\cdot2+5$　(移項すると　$5=71-33\cdot2$)

$33=5\cdot6+3$　(移項すると　$3=33-5\cdot6$)

$5=3\cdot1+2$　(移項すると　$2=5-3\cdot1$)

$3=2\cdot1+1$　(移項すると　$1=3-2\cdot1$)

$2=1\cdot2+0$

よって，71と33の最大公約数は1である。

すなわち，71と33は互いに素である。

(2)　(1) の計算結果を利用すると

$1=3-2\cdot1=3-(5-3\cdot1)\cdot1=3\cdot2-5=(33-5\cdot6)\cdot2-5$

$=33\cdot2-5\cdot13=33\cdot2-(71-33\cdot2)\cdot13=33\cdot28-71\cdot13=71\cdot(-13)-33\cdot(-28)$

したがって，求める整数 x，y の組の1つは　$x=-13$，$y=-28$　(答は他にもある)

(3)　求める自然数を n とすると，n は整数 a，b を用いて，$n=71a+2$，$n=33b+7$ と表される。

よって　$71a+2=33b+7$　すなわち　$71a-33b=5$　……①

ここで，(2) より　$71\cdot(-13)-33\cdot(-28)=1$

両辺に5を掛けると　$71\cdot(-65)-33\cdot(-140)=5$　……②

①−②から　$71(a+65)-33(b+140)=0$　……③

(1) より，71と33は互いに素であるから，③を満たす整数 a は $a+65=33k$ すなわち $a=33k-65$ (k は整数) と表される。

したがって　$n=71a+2=71(33k-65)+2=2343k-4613$

$2343k-4613$ が4桁で最小となるのは，$k=3$ のときで　$n=2343\cdot3-4613=2416$

９．［大阪経済大］

$xy-4x-2y-4=0$　……① を変形すると　$(x-2)(y-4)=12$

x，y は自然数であるから，$x-2$，$y-4$ は　$x-2\geqq-1$，$y-4\geqq-3$

を満たす12の約数である。

よって　$(x-2,\ y-4)=(1,\ 12),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2),\ (12,\ 1)$

ゆえに，①を満たす自然数 x，y の組は全部で ${}^{ア}6$ 組。

x の値が最大であるのは，$(x-2,\ y-4)=(12,\ 1)$ より $(x,\ y)={}^{イ}(14,\ 5)$ である。

整数の性質　演習プリント

16題＋5題（16題を何回も繰り返し解きましょう。余裕のある人は後半5題も繰り返し解いて身に着けよう。）

10．愛媛大］

$2m^2-n^2-mn-m+n=2m^2-(n+1)m-n^2+n$

$=2m^2-(n+1)m-n(n-1)=(m-n)\{2m+(n-1)\}$

$=(m-n)(2m+n-1)$

よって，$2m^2-n^2-mn-m+n=18$ から

$(m-n)(2m+n-1)=18$　……①

m，n が自然数であるとき，$m-n$，$2m+n-1$ は整数であり，また

$2m+n-1>0$，$2m+n-1>m-n$

ゆえに，① を満たす $(m-n,\ 2m+n-1)$ の組は

$(m-n,\ 2m+n-1)=(1,\ 18),\ (2,\ 9),\ (3,\ 6)$

[1]　$(m-n,\ 2m+n-1)=(1,\ 18)$ のとき

$m-n=1$，$2m+n-1=18$ から，$m=\dfrac{20}{3}$ となり，m は自然数でないから，不適。

[2]　$(m-n,\ 2m+n-1)=(2,\ 9)$ のとき

$m-n=2$，$2m+n-1=9$ から　　$m=4$，$n=2$

[3]　$(m-n,\ 2m+n-1)=(3,\ 6)$ のとき

$m-n=3$，$2m+n-1=6$ から，$m=\dfrac{10}{3}$ となり，m は自然数でないから，不適。

[1]～[3] から，求める自然数 m，n は　　$m=4$，$n=2$

11．［愛知工業大］

$\sqrt{24m}$ が自然数になるのは，$24m$ がある自然数の2乗になるときである。

24 を素因数分解すると　　$24=2^3\cdot 3$

よって，$\sqrt{24m}$ が自然数となるような最小の自然数 m は

$m=2\cdot 3$　　すなわち　　$m={}^{ア}6$

また，$\sqrt{n^2+60}=k$（k は自然数）とおくと　　$n^2+60=k^2$

ゆえに，$k^2-n^2=60$ であるから　　$(k+n)(k-n)=60$　……①

ここで　　$(k+n)+(k-n)=2k$

k は自然数であるから，$k+n$ と $k-n$ の和は偶数である。

また　　$k+n>0$，$k+n>k-n$

これに注意すると，① を満たす組 $(k+n,\ k-n)$ は

$(k+n,\ k-n)=(30,\ 2),\ (10,\ 6)$

したがって　　$(k,\ n)=(16,\ 14),\ (8,\ 2)$

よって，$\sqrt{n^2+60}$ が自然数となるような最大の自然数 n は

$n={}^{イ}14$

12．［関西大］

(1)　正の整数 a は n を自然数として $3n-2$，$3n-1$，$3n$ のいずれかで表される。

$a=3n-2$ のとき　　$a^2=(3n-2)^2=9n^2-12n+4=3(3n^2-4n+1)+1$

$a=3n-1$ のとき　　$a^2=(3n-1)^2=9n^2-6n+1=3(3n^2-2n)+1$

$a=3n$ のとき　　$a^2=(3n)^2=3\cdot 3n^2$

よって，a^2 を3で割った余りは 0 または1

(2)　b^2 を3で割った余りも0または1である。

よって，a^2，b^2 は $a^2=3k+r_a$，$b^2=3l+r_b$（k，l は整数，r_a，r_b は0または1）と表すことができて　　$a^2+b^2=3(k+l)+r_a+r_b$

r_a+r_b の値は右の表のようになる。

r_b ＼ r_a	0	1
0	0	1
1	1	2

c^2 を3で割った余りは0または1であるから，$a^2+b^2=c^2$ を満たすとき，$(r_a,\ r_b)$ は $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ のいずれかである。

したがって，a^2，b^2 の少なくとも一方は3の倍数であるから，

a，b の少なくとも一方は3の倍数である。

ゆえに，a，b，c の積 abc は3の倍数である。

(3)　$a^2+b^2=225$ において，225は3の倍数であるから，$r_a+r_b=0$ の場合で，a，b はともに3の倍数である。

$b^2=225-a^2>0$ から　　$a^2<225$　　よって，$a>0$ から　　$0<a<15$

a は3の倍数であるから　　$a=3,\ 6,\ 9,\ 12$

このとき　　$b^2=216,\ 189,\ 144,\ 81$

b は正の整数であるから　　$(a,\ b)=(9,\ 12),\ (12,\ 9)$

別解　整数 p，q について，$p-q$ が3の倍数であるとき，$p\equiv q \pmod 3$ と書くことにする。

(1)　自然数 a について，$a\equiv 0 \pmod 3$，$a\equiv \pm 1 \pmod 3$ のいずれかが成り立つ。

$a\equiv 0 \pmod 3$ のとき　　$a^2\equiv 0 \pmod 3$

$a\equiv \pm 1 \pmod 3$ のとき　　$a^2\equiv 1 \pmod 3$

よって，a^2 を3で割った余りは 0 または1

(2)　背理法で示す。

abc が3の倍数でないとすると，(1) より　　$a^2\equiv 1 \pmod 3$，$b^2\equiv 1 \pmod 3$

よって　　$c^2=a^2+b^2\equiv 2 \pmod 3$

これは (1) と矛盾する。

ゆえに，abc は3の倍数である。

(3)　$225\equiv 0 \pmod 3$ であるから，(1) より　　$a^2\equiv 0 \pmod 3$，$b^2\equiv 0 \pmod 3$

$a=3a'$，$b=3b'$（a'，b' は自然数）とすると，$a^2+b^2=225$ より　　$9a'^2+9b'^2=225$

すなわち　　$a'^2+b'^2=25$

$b'^2=25-a'^2>0$ から　　$a'^2<25$　　よって，$a'>0$ から　　$0<a'<5$

a'，b' が自然数となるものは　　$(a',\ b')=(3,\ 4),\ (4,\ 3)$

ゆえに　　$(a,\ b)=(9,\ 12),\ (12,\ 9)$

13．［大阪工業大］

$2^6=64=13\times {}^{ア}5-1$

したがって

$2^{96}=(2^6)^{16}=(13\times 5-1)^{16}=(13\times 5)^{16}-{}_{16}C_1(13\times 5)^{15}+\cdots\cdots-{}_{16}C_{15}(13\times 5)+1$

$(13\times 5)^{16}-{}_{16}C_1(13\times 5)^{15}+\cdots\cdots-{}_{16}C_{15}(13\times 5)$ は13の倍数であるから，

$2^{96}=13k+1$（k は整数）……①

と表される。

① の両辺に 2^4 を掛けると　　$2^{100}=2^4\cdot 13k+2^4$

k は整数であるから，2^{100} を13で割った余りは，2^4 を13で割った余りに一致する。

$2^4=16$ であるから，2^4 を13で割った余りは　　3

ゆえに，2^{100} を13で割った余りは　　${}^{イ}3$

別解　（合同式を用いた解法）

任意の整数 a，b に対して，$a-b$ が13の倍数であるとき，$a\equiv b \pmod{13}$ と表す。

（イ）　$2^6\equiv -1 \pmod{13}$ であるから

$(2^6)^{16}\equiv(-1)^{16} \pmod{13}$　　すなわち　　$2^{96}\equiv 1 \pmod{13}$

よって　　$2^{100}\equiv 2^4\equiv 16\equiv 3 \pmod{13}$

ゆえに，2^{100} を13で割った余りは　　${}^{イ}3$

14．［大阪経済大］

(1)　$0.111_{(2)}=1\cdot\dfrac{1}{2^1}+1\cdot\dfrac{1}{2^2}+1\cdot\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}=0.875$

(2)　$\dfrac{18}{13}$ を小数を用いて表すと　　$\dfrac{18}{13}=1.\dot{3}8461\dot{5}$

小数第1位から，6個の数字の並び384615が繰り返される。

$200=6\cdot 33+2$ であるから，小数第200位の数字は384615の2番目の数字で　　8

15．［昭和女子大］

2進法で10桁で表される数を x とおくと　　$2^9\leqq x<2^{10}$

ゆえに，求める自然数の総数は　　$(2^{10}-1)-2^9+1=2^9=512$

別解　2進法で10桁で表される自然数は，$1000000000_{(2)}$ から $1111111111_{(2)}$ までで，最高位の1以外の9桁は0か1のいずれかである。

よって，総数は　　$2^9=512$

16．［星薬科大］

条件より　　$1\leqq a\leqq 4$，$1\leqq b\leqq 4$，$0\leqq c\leqq 4$

求める数を n とすると，n は7進法で $abc_{(7)}$ と表せるから　　$n=7^2\cdot a+7\cdot b+c$

よって　　$n=49a+7b+c$　……①

n は5進法で $bca_{(5)}$ と表せるから　　$n=5^2\cdot b+5\cdot c+a$

よって　　$n=25b+5c+a$　……②

①，② より　　$49a+7b+c=25b+5c+a$

よって　　$48a-18b-4c=0$　　ゆえに　　$24a-9b-2c=0$

整理すると　　$2(12a-c)=9b$

2と9は互いに素であるから，整数 k を用いて　　$12a-c=9k$，$b=2k$

$1\leqq b\leqq 4$ より　　$k=1,\ 2$

[1]　$k=1$ のとき

$12a-c=9$ より　　$c=12a-9$

$0\leqq c\leqq 4$ より　　$a=1$

このとき　　$c=3$　　よって　　$a=1$，$b=2$，$c=3$

[2]　$k=2$ のとき

$12a-c=18$ より　　$c=6(2a-3)$

$0\leqq c\leqq 4$ より，これを満たす整数 a は存在しない。

[1]，[2] より　　$a=1$，$b=2$，$c=3$

したがって，求める n は ① より　　$n=49\cdot 1+7\cdot 2+3=66$

整数の性質　演習プリント

16題＋5題(16題を何回も繰り返し解きましょう。余裕のある人は後半5題も繰り返し解いて身に着けよう。)

17．［自治医科大］

n，$n+2$，$n+4$ のいずれか1つは3の倍数であることを示す。

n は $n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$ (k は整数) のいずれかの形で表される。

[1]　$n=3k$ のとき

n は3の倍数である。

[2]　$n=3k+1$ のとき

$n+2=3k+3=3(k+1)$ であり，$k+1$ は整数であるから，$n+2$ は3の倍数である。

[3]　$n=3k+2$ のとき

$n+4=3k+6=3(k+2)$ であり，$k+2$ は整数であるから，$n+4$ は3の倍数である。

[1]～[3] から，n，$n+2$，$n+4$ のいずれか1つは3の倍数である。

よって，n，$n+2$，$n+4$ がすべて素数であるとき，いずれか1つは3である。

$n=3$ のとき，$n+2=5$，$n+4=7$ であるから，n，$n+2$，$n+4$ はすべて素数である。

$n+2=3$ のとき，$n=1$ となり，1は素数でないから，不適。

$n+4=3$ のとき，$n=-1$ となり，n は $1\leqq n\leqq 100$ を満たさないから，不適。

以上から，n，$n+2$，$n+4$ がすべて素数となる整数 n は，$n=3$ の1個である。

18．［立命館大］

(1)　63を素因数分解すると　　$63={}^{ア}3^2\cdot 7$

よって　　$d(63)=(2+1)(1+1)={}^{イ}6$

また，$63^2\cdot 5=3^4\cdot 5\cdot 7^2$ であるから

$$d(63^2\cdot 5)=(4+1)(1+1)(2+1)={}^{ウ}30$$

(2)　$d(n)=2$ となる自然数 n は素数であるから，$1\leqq n\leqq 35$ を満たすものは

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31

の ${}^{エ}11$ 個ある。n が素数のとき，n の正の約数の総和は　　$n+1$

よって，$n+1=30$ を解くと　　$n={}^{オ}29$

$d(n)=3$ となる自然数 n は(素数)^2 の形であるから，$1\leqq n\leqq 1000$ を満たすものは

2^2，3^2，5^2，……，31^2 の ${}^{カ}11$ 個ある。

m が素数のとき，m^2 の正の約数の総和は　　$1+m+m^2$

よって，$1+m+m^2=57$ から　　$(m-7)(m+8)=0$

m は素数であるから　　$m=7$

ゆえに　　$n=7^2={}^{キ}49$

(3)　(i)　$d(p^\alpha)=\alpha+1$ であるから，p が小さいほど α を大きくできる。よって $p=2$ としてよく，$2^\alpha\leqq 1000$ を満たす最大の α は　　$\alpha=9$

ゆえに，$n=2^9={}^{ク}512$ のとき　最大値 ${}^{ケ}10$

(ii)　$d(p^\alpha\cdot q^\beta)=(\alpha+1)(\beta+1)$ であるから，(i) と同様に $p=2$，$q=3$ としてよい。

このとき，$2^\alpha\cdot 3^\beta\leqq 1000$，$\alpha\geqq 1$，$\beta\geqq 1$ であるから

$$3^\beta\leqq\frac{1000}{2^\alpha}\leqq\frac{1000}{2^1}=500$$

これを満たす β は　　$\beta=1$，2，3，4，5

$\beta=1$ のとき，$\alpha=8$ のときを考え　$d(2^8\cdot 3^1)=18$

$\beta=2$ のとき，$\alpha=6$ のときを考え　$d(2^6\cdot 3^2)=21$

$\beta=3$ のとき，$\alpha=5$ のときを考え　$d(2^5\cdot 3^3)=24$

$\beta=4$ のとき，$\alpha=3$ のときを考え　$d(2^3\cdot 3^4)=20$

$\beta=5$ のとき，$\alpha=2$ のときを考え　$d(2^2\cdot 3^5)=18$

以上より，$n=2^5\cdot 3^3={}^{コ}864$ のとき　最大値 ${}^{サ}24$

19．［名古屋市立大］

(1)　$xy+yz+zx=xyz$ の両辺を xyz ($\neq 0$) で割ると

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\quad\cdots\cdots①$$

$0<x\leqq y\leqq z$ より $\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{x}$ であるから

$$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqq\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$$

すなわち　　$1\leqq\dfrac{3}{x}$　　よって　　$x\leqq 3$

(2)　x は自然数であるから，(1) より　　$x=1$，2，3

[1]　$x=1$ のとき　　① から　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$

これを満たす自然数 y，z は存在しない。

[2]　$x=2$ のとき　　① から　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{2}{y}$ より $y\leqq 4$ で，$x\leqq y$ であるから　　$y=2$，3，4

$y=2$ のとき，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ から　　これを満たす自然数 z は存在しない。

$y=3$ のとき，$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ から　　$z=6$　($y\leqq z$ を満たす)

$y=4$ のとき，$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ から　　$z=4$　($y\leqq z$ を満たす)

[3]　$x=3$ のとき　　① から　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{2}{y}$ より $y\leqq 3$ で，$x\leqq y$ であるから　　$y=3$

このとき，$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$ から　　$z=3$　($y\leqq z$ を満たす)

[1]～[3] から，求める自然数 x，y，z の組は

$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6)$，$(2,\ 4,\ 4)$，$(3,\ 3,\ 3)$

20．［東京女子大］

$1\leqq a\leqq b\leqq c\leqq d$ と仮定すると，

$abcd=a+b+c+d\leqq d+d+d+d=4d$ から　$abc\leqq 4$　……①

これと，$abc\geqq a\cdot a\cdot a=a^3$ から　　$a^3\leqq 4$　　ゆえに　　$a=1$

このとき，① から　　$bc\leqq 4$

これと，$bc\geqq b\cdot b=b^2$ から　　$b^2\leqq 4$　　ゆえに　　$b=1$，2

[1]　$b=1$ のとき

$cd=1+1+c+d$ から　　$(c-1)(d-1)=3$

$1=b\leqq c\leqq d$ より，$0\leqq c-1\leqq d-1$ であるから　　$c-1=1$，$d-1=3$

よって　　$c=2$，$d=4$

[2]　$b=2$ のとき

$2cd=1+2+c+d$ から　$(2c-1)(2d-1)=7$

$2=b\leqq c\leqq d$ より，$3\leqq 2c-1\leqq 2d-1$ であるから，$(2c-1)(2d-1)=7$ を満たす

$2c-1$，$2d-1$ の組はない。

以上から，$a\leqq b\leqq c\leqq d$ のとき　　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 2,\ 4)$

したがって，求める解は

$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 2,\ 4)$，$(1,\ 1,\ 4,\ 2)$，$(1,\ 2,\ 1,\ 4)$，$(1,\ 2,\ 4,\ 1)$，
$(1,\ 4,\ 1,\ 2)$，$(1,\ 4,\ 2,\ 1)$，$(2,\ 1,\ 1,\ 4)$，$(2,\ 1,\ 4,\ 1)$，
$(2,\ 4,\ 1,\ 1)$，$(4,\ 1,\ 1,\ 2)$，$(4,\ 1,\ 2,\ 1)$，$(4,\ 2,\ 1,\ 1)$

21．［神戸薬科大］

$n=3x+7y$ の形で表される自然数 n のうち，

[1]　3の倍数で最小のものは　　$3\cdot 0+7\cdot 0=0$

また，$3m+7\cdot 0=3m$ (m は0以上の整数) であるから，0以上の3の倍数はすべて $3x+7y$ の形で表される。

[2]　3で割ると1余る数で最小のものは　　$3\cdot 0+7\cdot 1=7$

また，$3m+7\cdot 1=3(m+2)+1$ (m は0以上の整数) であるから，3で割って1余る数のうち，7以上のものはすべて $3x+7y$ の形で表される。

[3]　3で割って2余る数で最小のものは　　$3\cdot 0+7\cdot 2=14$

また，$3m+7\cdot 2=3(m+4)+2$ (m は0以上の整数) であるから，3で割って2余る数のうち，14以上のものはすべて $3x+7y$ の形で表される。

以上から，$n=3x+7y$ の形で表されない自然数 n は　　1，2，4，5，8，11

また，$3x+7y=2008$ ……① について考える。

$x=667$，$y=1$ は ① の整数解の1つであり　　$3\cdot 667+7\cdot 1=2008$　……②

①－② から　　$3(x-667)+7(y-1)=0$　　すなわち　　$3(x-667)=-7(y-1)$

3と7は互いに素であるから，$y-1$ は3の倍数である。

よって，k を整数として，$y-1=3k$ と表される。

ゆえに　　$x=-7k+667$，$y=3k+1$

$x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ より　　$-7k+667\geqq 0$ かつ $3k+1\geqq 0$

よって　　$-\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{667}{7}$

これを満たす整数 k の個数は，0，1，2，3，……，95 の　　96個