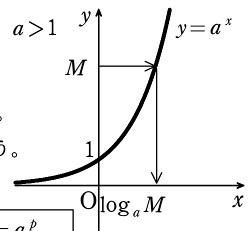
対数関数　基本事項

◎ 対数の定義

　一般に，$a>0$，$a \neq 1$ とするとき，どのような正の実数 M に対しても，$M=a^p$ となる実数 p が，ただ１つ決まる。
この p を $\log_a M$ と表し，a を **底** とする M の **対数** という。
また，$\log_a M$ における正の実数 M をこの対数の **真数** という。
　指数と対数の関係は，次のようになる。



指数と対数　（対数の定義）

　$a>0$，$a \neq 1$，$M>0$ とする。

$$M=a^p \Longleftrightarrow \log_a M=p$$

$M=a^p$
$\log_a M=p$
底　真数

一般に、$a^x=b \Leftrightarrow x=\log_a b$ より、$\boxed{a^{\log_a b}=b}$ が成り立つ。

◎ 対数の性質

　まず，$a^0=1$，$a^1=a$ であるから，次のことが成り立つ。

$$\log_a 1=0, \quad \log_a a=1$$

　また，指数法則と対数の定義から，対数について次の性質が導かれる。

対数の性質

$a>0$，$a \neq 0$，$M>0$，$N>0$ で，k は実数とする。

1　$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

2　$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

3　$\log_a M^k=k\log_a M$

【１の証明】　$\log_a M=p$，$\log_a N=q$ とすると　　$M=a^p$，$N=a^q$
　よって　　　$MN=a^p \times a^q=a^{p+q}$
　対数を使って書き直すと
　　$\log_a MN=p+q$　　すなわち　$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$　終

【２の証明】　$\log_a M=p$，$\log_a N=q$ とすると　　$M=a^p$，$N=a^q$
　よって　　　$\dfrac{M}{N}=\dfrac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$
　対数を使って書き直すと
　　$\log_a MN=p-q$　　すなわち　$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$　終

【３の証明】　$\log_a M=p$ とすると　　$M=a^p$
　両辺を k 乗すると　　$M^k=a^{kp}$
　対数を使って書き直すと
　　$\log_a M^k=kp$　　すなわち　$\log_a M^k=k\log_a M$　終

◎ 底の変換公式

　a を底とする対数 $\log_a b$ を，c を底とする対数で表してみよう。
　$\log_a b=p$ とすると　　$b=a^p$
$c>0$，$c \neq 1$ として，c を底とする両辺の対数をとると
　　$\log_c b=\log_c a^p$　　すなわち　　$\log_c b=p\log_c a$
$a \neq 1$ より $\log_c a \neq 0$ であるから　　$p=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
　よって，次の公式が得られる。これを **底の変換公式** という。

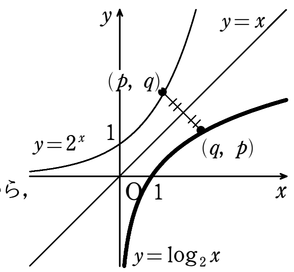
底の変換公式

$a>0$，$b>0$，$c>0$ で，$a \neq 1$，$c \neq 1$ とする。

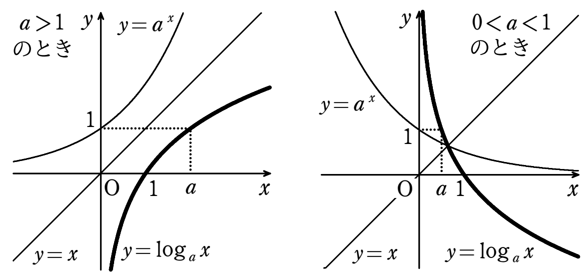
$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

◎ 対数関数のグラフ

対数の定義によると，$p=\log_2 q \Longleftrightarrow q=2^p$　である。
よって，点 $(p,\ q)$ が $y=2^x$ のグラフ上にあるとき，
点 $(p,\ q)$ の x 座標と y 座標を入れかえた点 $(q,\ p)$ は
$y=\log_2 x$ のグラフ上にある。また，その逆も成り立つ。
点 $(p,\ q)$ と点 $(q,\ p)$ は直線 $y=x$ に関して対称であるから，
$y=\log_2 x$ のグラフと $y=2^x$ のグラフは直線 $y=x$ に関して対称である 。



　一般に，対数関数 $y=\log_a x$ のグラフは，
指数関数 $y=a^x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称で，次のようになる。



1　グラフは y 軸を漸近線とし，点 $(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通る。
2　グラフは，$a>1$ のとき右上がり，$0<a<1$ のとき右下がりである。

◎ 対数関数の性質

　対数関数　$y=\log_a x$ には，次の性質がある。

対数関数　$y=\log_a x$ の性質

1　定義域は $x>0$，値域は実数全体である。
2　$a>1$ のとき，x の値が増加すると，y の値も増加する。
　すなわち　　$0<p<q \Longleftrightarrow \log_a p<\log_a q$
3　$0<a<1$ のとき，x の値が増加すると，y の値は減少する。
　すなわち　　$0<p<q \Longleftrightarrow \log_a p>\log_a q$