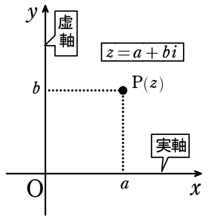
複素数平面　基本事項

◎ 複素数平面

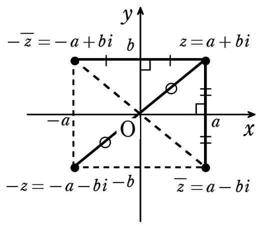
複素数 …2つの実数 a，b と虚数単位 i を用いて $\boldsymbol{a+bi}$ **の形で表される数**

複素数 $a+bi$ … $\begin{cases} \text{実数 } a\ (b=0) \\ \text{虚数} a+bi\ (b \neq 0)\text{，純虚数 } bi\ (a=0,\ b\neq 0) \end{cases}$



複素数 $a+bi$ に対して，座標平面上の点 $(a,\ b)$ を対応させると，
どんな複素数も座標平面上の点で表すことができる。
複素数を点で表す座標平面を「**複素数平面**」または「**複素平面**」
といい、複素数平面では、x 軸を「**実軸**」, y 軸を「**虚軸**」という。
複素数平面上で複素数 z を表す点 P を P(z) と書く。また，
複素数平面上で複素数 z は単に「**点 z**」ともいう。つまり、原点 O は点 0 という。

◎ 共役複素数



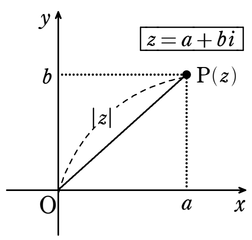
複素数 z と共役な複素数を $\overline{z}$ で表す。$z=a+bi$ に対して，
$\overline{z}=a-bi$，$-z=-a-bi$である。複素数平面上で，
点 z と点 $\overline{z}$ は実軸に関して対称であり、
点 z と点 $-z$ は原点に関して対称であり、
点 z と点 $-\overline{z}$ は虚軸に関して対称である。
また、$\overline{z}$ の共役複素数は z である。つまり，$\overline{\overline{z}}=z$ である。

点 z が実軸上にあれば，点 $\overline{z}$ は点 z と一致するから，$\overline{z}=z$ である。
また，原点 O と異なる点 z が虚軸上にあれば，点 $\overline{z}$ は虚軸上にあり，かつ
点 z と原点 O に関して対称になるから，$\overline{z}=-z$ である。

複素数 z について，次のことが成り立つ。

> 1　**z が実数**　$\Longleftrightarrow$　$\overline{z}=z$
> 2　**z が純虚数**　$\Longleftrightarrow$　$\overline{z}=-z$　かつ　$z\neq 0$

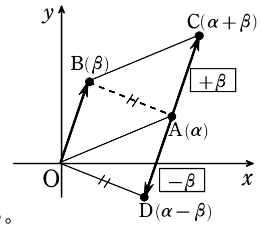
◎ 複素数の絶対値



原点 O と点 P(z) との距離を，複素数 z の **絶対値** といい，
$|z|$ で表す。$z=a+bi$ のとき，$\mathrm{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$ である。

> **複素数の絶対値**
> 複素数 $a+bi$ の絶対値は　$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

◎ 複素数の和，差



2つの複素数$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ に対して、
$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$，$\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i$ である。
複素数平面上に 4 点A(α)， B(β)，C($\alpha+\beta$)，D($\alpha-\beta$)
をとると，
右上の図において，
四角形 OACB，四角形 ODAB はそれぞれ平行四辺形である。
1．点 C($\alpha+\beta$) は，原点 O を点 B(β) に移す平行移動によって点 A(α) が移る点である。
　（「点 $\alpha+\beta$ は 点 α を β だけ平行移動したもの」という言い方もある。）
2．点 D($\alpha-\beta$) は，点 B(β) を原点 O に移す平行移動によって点 A(α) が移る点である。
　（「点 $\alpha-\beta$ は 点 α を $-\beta$ だけ平行移動したもの」という言い方もある。）

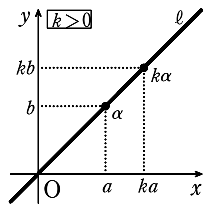
★ 複素数の和，差は「平行移動」を意味する

また、次のことが成り立つ。（図で確認せよ）

> 2 点 A(α)，B(β) 間の距離は　$|\alpha-\beta|$

←AB=OD　or $|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=|\alpha-\beta|$

◎ 複素数の実数倍



実数 k と複素数 $\alpha=a+bi$ について，$k\alpha=ka+kbi$ である。
よって，$\alpha\neq 0$ のとき，点 $k\alpha$ は 2 点 0，α を通る直線 ℓ 上にある。
$k=0$ のとき点 $k\alpha$ は点 0 と一致する。
A(α)，B($k\alpha$) とすると，線分 OB の長さは線分 OA の長さの
$|k|$ 倍である。つまり，$\mathrm{OB}=|k|\mathrm{OA}$ である。

★ 複素数の実数倍は 点 0 からの距離を「拡大または縮小」を意味する。

$\alpha\neq 0$ のとき，次のことが成り立つ。

> **3 点 0，α，β が一直線上にある　$\Longleftrightarrow$　$\beta=k\alpha$ を満たす実数 k が存在する**

◎複素数平面とベクトル

座標平面上の点 A(a, b)，B(c, d) に対して、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(c,\ d)$ であり、
$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$とすると、
$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(a+c,\ b+d)$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(a-c,\ b-d)$，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=(ka,\ kb)$となり、
複素数の和，差，実数倍の計算とベクトルの和，差，実数倍の計算は同様になっている。
（実部とx成分，虚部とy成分を比べて見よ。複素数はベクトルのように振る舞う）

つまり、複素数の和，差，実数倍とベクトルの和．差，実数倍は同一視して考えるとよい。

「$\alpha+\beta \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$」，「$\alpha-\beta \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$（$=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$）」，「$k\alpha \Leftrightarrow k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$」
のように対応させて考えるとよい。
特に、後に紹介する「点の回転」では「$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\beta-\alpha$」，「$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\gamma-\alpha$」と同一視して
立式するのがよい。

◎ 共役複素数の性質

複素数 α，β について，次のことが成り立つ。

> **共役複素数の性質**
> 1　$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$　　2　$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$
> 3　$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$　　4　$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$
> 5　$\overline{\alpha^n}=(\overline{\alpha})^n$　（n を自然数）

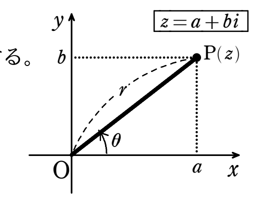
【1，3の証明】

$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$(a，b，c，d **は実数**) とすると，$\overline{\alpha}=a-bi$，$\overline{\beta}=c-di$である。
$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$，$\overline{\alpha+\beta}=(a+c)-(b+d)i$
よって　$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=(a-bi)+(c-di)=(a+c)-(b+d)i=\overline{\alpha+\beta}$
また　$\alpha\beta=(ac-bd)+(ad+bc)i$，$\overline{\alpha\beta}=(ac-bd)-(ad+bc)i$
よって　$\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i=\overline{\alpha\beta}$　㊢

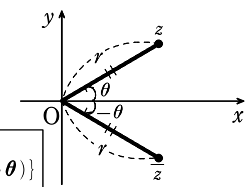
性質２，４も同様にして証明できる。（各自確かめよ）
性質３が成り立つから，性質５ が成り立つ。（数学的帰納法で証明できる）
また、
$z=a+bi$ とすると，$\overline{z}=a-bi$ であるから
$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$
$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$
よって，複素数 z とその共役複素数 $\overline{z}$ について，次のことが成り立つ。

> 1　**$z+\overline{z}$ は実数である**　　2　$\boldsymbol{z\overline{z}=|z|^2}$

◎ 極形式



複素数平面上で 0 でない複素数 $z=a+bi$ を表す点を P とする。
線分 OP の長さを r，半直線 OP を動径と考えて動径 OP の
表す角を θ とすると，$r=\sqrt{a^2+b^2}$，$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$
である。
よって，0 でない複素数 z は次の形に表すことができる。
$\boldsymbol{z=r(\cos\theta+i\sin\theta)}$　（ただし，$r>0$ で，θ は弧度法で表された一般角）
これを複素数 z の「**極形式**」という。$\boldsymbol{r=|z|}$ である。
また，角 θ を z の「**偏角**」といい，「$\boldsymbol{\arg z}$」で表す。
偏角 θ は，$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲や $-\pi<\theta\leqq\pi$ の範囲でただ 1 通りに定まる。
z の偏角の 1 つを θ_0 とすると，一般には，$\arg z=\theta_0+2n\pi$（n は整数）である。



複素数 z の偏角を θ とするとき，$\overline{z}$ の偏角の 1 つは，
$\arg\overline{z}=-\theta$ である。また，$|z|=|\overline{z}|$ であるから，
z と $\overline{z}$ の極形式について，次のことがいえる。

> $\boldsymbol{z=r(\cos\theta+i\sin\theta)}$ **のとき，**$\boldsymbol{\overline{z}=r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}}$

◎ 極形式で表された複素数の積と商

絶対値が1である2つの複素数 $\cos\theta_1+i\sin\theta_1$，$\cos\theta_2+i\sin\theta_2$ の積と商は，三角関数の加法定理により，次のようになる。

積　$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$$=(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)$$
$$=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

商　$\dfrac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}$

$$=\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$$
$$=\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}$$
$$=\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)$$

一般に，次のことがいえる。

> $\alpha=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$\beta=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき
> $$\alpha\beta=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$
> $$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

複素数の積と商について，次のことが成り立つ。

> **複素数の積と商の絶対値と偏角**
> 1　$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$　，　$\arg\alpha\beta=\arg\alpha+\arg\beta$
> 2　$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$　，　$\arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\arg\alpha-\arg\beta$
> 3　$|z^n|=|z|^n$　（n は自然数）

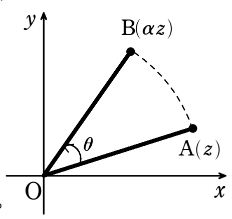
性質1が成り立つから，性質3 が成り立つ。（数学的帰納法で証明できる）
また、偏角についての等式では，2π の整数倍の違いは無視して考える。

◎ 原点を中心とする回転

絶対値が1である複素数 $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ と複素数 z との積 αz について，その絶対値と偏角は，次のようになる。

$|\alpha z|=|\alpha||z|=|z|$，　$\arg\alpha z=\arg\alpha+\arg z=\arg z+\theta$

このことから，次のことがいえる。



$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ と z に対して，

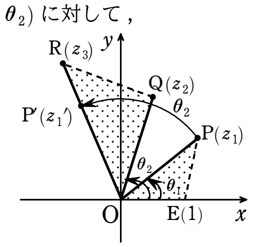
点 αz は、点 z を原点を中心として θ だけ回転した点である。

$\mathrm{A}(z)$, $\mathrm{B}(\alpha z)$とすると、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ をθ だけ回転したものである。

2つの複素数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ に対して，$z_3=z_1z_2$ とおくと，$|z_3|=r_1r_2$，$\arg z_3=\theta_1+\theta_2$である。

よって，点 $\mathrm{R}(z_3)$ は，点 $\mathrm{P}(z_1)$ を原点を中心として θ_2だけ回転した点 $\mathrm{P}'(z_1')$ を r_2 倍した点である。

z_1 が実数でないとき，右の図のように△ROQ は △POE を原点を中心として角 θ_2 だけ回転し，r_2 倍に拡大または縮小したものであることがわかる。

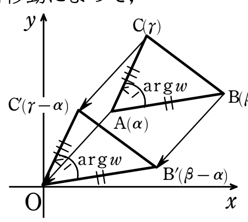


★ 複素数 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ を掛けると、点 0 を中心として θ だけ回転し、点 0 からの距離をr 倍にする

◎ ある点を中心とする回転（一般の回転）

点 β を点 α を中心として θ だけ回転し、点 α からの距離を r 倍にした点を γ とする。

$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ とすると、点 A を原点 O に移す平行移動によって，点 B，C はそれぞれ点 $\mathrm{B}'(\beta-\alpha)$，$\mathrm{C}'(\gamma-\alpha)$ に移る。



このとき，△ABC≡△OB′C′ であるから，点 $\gamma-\alpha$ は点 $\beta-\alpha$ を原点 Oを中心としてθ だけ回転し、原点 O からの距離を r 倍にした点である。

よって、

$\boldsymbol{\gamma-\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)}$ … ① が成り立つ。

また、

「$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をθ だけ回転しr 倍したもの」と言い換えれるので、

「$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\beta-\alpha$」，「$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\gamma-\alpha$」と同一視して考えれば、①は簡単に立式できる。

◎ 複素数 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が表すもの

△ABC において、$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ とする。

($\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をθ だけ回転し，r 倍したもの)

⇔　$\boldsymbol{\gamma-\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)}$

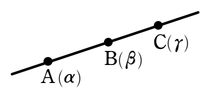
⇔　$\boldsymbol{\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=r(\cos\theta+i\sin\theta)}$

よって、$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\dfrac{|\gamma-\alpha|}{|\beta-\alpha|}=r$ より、$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=r$ であり、$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\theta$

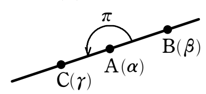
（ただし、θ は $-\pi\leqq\theta<\pi$ とする）より、$\angle\mathrm{BAC}=|\theta|$である。

★ 複素数 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を 極形式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$にすれば、
△ABC の2 辺の比 AC：AB および ∠BAC の大きさがわかる

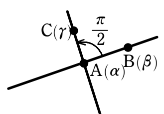
回転角 $\angle\beta\alpha\gamma$ が，特別な値をとる場合を考えてみよう。

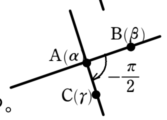


$\angle\beta\alpha\gamma$ が 0 または π であるのは，3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ が一直線上にあるときである。これは $\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が 0 または π であるとき，すなわち $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数のときである。



また，$\angle\beta\alpha\gamma$ が $\dfrac{\pi}{2}$ または $-\dfrac{\pi}{2}$ であるのは，2 直線 AB，AC が垂直に交わるときである。これは $\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が $\dfrac{\pi}{2}$ または $-\dfrac{\pi}{2}$ であるとき，すなわち $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数のときである。

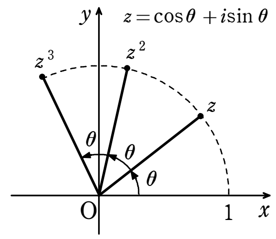




よって，異なる 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ について，次のことが成り立つ。

> 3 点 A，B，C が一直線上にある　⟺　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数
> 2 直線 AB，AC が垂直に交わる　⟺　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数

◎ド・モアブルの定理



絶対値が1の複素数に$\cos\theta+i\sin\theta$ を掛けると，絶対値は1のままで，偏角は θ だけ増える。よって

$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos2\theta+i\sin2\theta$

$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos3\theta+i\sin3\theta$

となり，一般に，自然数 n について，次の等式が成り立つ。

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$　……①

0でない複素数 z に対して，$z^0=1$ と定めると，等式 ① は $n=0$ のときも成り立つ。

さらに，$z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$ と定めると

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}=\frac{1}{\cos n\theta+i\sin n\theta}$$
$$=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)=\cos(-n)\theta+i\sin(-n)\theta$$　となる。

> **ド・モアブルの定理**
> n が整数のとき　$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

◎ 複素数の n 乗根

複素数 α と正の整数 n に対して，方程式 $z^n=\alpha$ の解を，α の **n 乗根** という。

0 でない複素数の n 乗根は n 個あることが知られている。

n を自然数として，1 の n 乗根を求めてみよう。z を 1 の n 乗根とすると、

$z^n=1$ から，$|z|^n=|z^n|=1$であり，$|z|$ は正の実数であるから　$|z|=1$

よって、$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと、$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ であり

$1=\cos0+i\sin0$ より、$z^n=1$ の両辺の偏角を比較すると，

$n\theta=2k\pi$　すなわち　$\theta=\dfrac{2k\pi}{n}$　（k は整数)となる。

k を整数として、$z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$　……①とおくと，ド・モアブルの定理より

$(z_k)^n=1$ が成り立つから，z_k は 1 のn 乗根である。また，z_{n+k} と z_k の偏角は 2π だけ異なり，ともに絶対値は 1 であるから $z_{n+k}=z_k$ が成り立つ。

よって，① の z_k のうち，互いに異なるものは

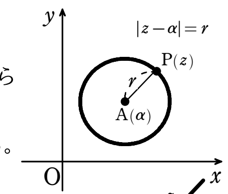
z_0，z_1，z_2，……，z_{n-1}　の n 個である。　以上より，次のことが成り立つ。

> **1 の n 乗根**
> 自然数 n に対して，1 の n 乗根は，次の n 個の複素数である。
> $z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$　（$k=0$，1，2，……，$n-1$）

★ 1 の n 乗根が表す点は，単位円に内接する正 n 角形の各頂点($n\geqq3$)である

◎方程式の表す図形

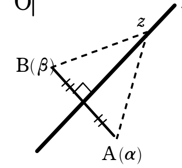
1．方程式$|z-\alpha|=r$



複素数 z が方程式$|z-\alpha|=r$を満たすとき、点 z 全体は，点 α から距離 r 離れた点の全体で、点 α を中心とする半径 r の円である。

特に、原点を中心とする半径 r の円は，方程式 $|z|=r$ で表される。

2．方程式 $|z-\alpha|=|z-\beta|$



複素数 z が方程式 $|z-\alpha|=|z-\beta|$を満たすとき 、点 z 全体は，2 点 α，βから等距離にある点の全体で，2 点 α，β を結ぶ線分の垂直二等分線である。