

☆ 等差中項, 等比中項で成り立つ関係式'

1. a, b, c がこの順で等差数列をなす $\Leftrightarrow a+c=2b$

2. a, b, c がこの順で等比数列をなす $\Leftrightarrow ac=b^2$

ポイント 求める3数に大小関係をつけておくとい

解答

求める3数を a, b, c ($a < b < c$) とすると,

$$abc = 64 \dots ①$$

a, b, c または c, b, a の順に等差数列より,

$$a+c=2b \dots ②$$

a, b, c がこの順で等比数列のとき, 公比を r とする.

(i) $r > 0$ のとき,

①より, $0 < a < b < c$ であり,

a, b, c または c, b, a の順で等比数列より, $ac=b^2 \dots ③$

$$①, ③ \text{より, } b^3=64 \therefore b=4$$

$b=4$ を ②, ③ に代入すると, $a+c=8, ac=16$

よって, a, c は, $x^2-8x+16=0$ の2解より

$$(x-4)^2=0 \therefore x=4$$

$(a, b, c) = (4, 4, 4)$ となり, 3数が相異なることに反する.

(ii) $r < 0$ のとき,

①より, $a < b < 0 < c$ であり,

a, c, b または, b, c, a の順に等比数列より, $ab=c^2 \dots ④$

$$①, ④ \text{より, } c^3=64 \therefore c=4$$

$$\text{よって, } ② \text{より, } a=2b-4 \dots ②'$$

$$④ \text{より, } ab=16$$

この2式より, a を消去して整理すると,

$$(b-4)(b+2)=0$$

$$b \neq c \text{より, } b \neq 4 \therefore b=-2$$

$$②' \text{に } b=-2 \text{ を代入すると, } a=-8$$

(i), (ii)より, 求める3数は, $-8, -2, 4$

コナント

①より, (a, b, c) は, (\oplus, \oplus, \oplus) と $(\ominus, \ominus, \oplus)$ に限られる.

$r > 0$ のときは, $\underbrace{\oplus}_{\times r}, \underbrace{\oplus}_{\times r}, \underbrace{\oplus}_{\times r}$ しかありえず,

$r < 0$ のときは, $\underbrace{\ominus}_{\times r}, \underbrace{\oplus}_{\times r}, \underbrace{\ominus}_{\times r}$ しかありえない.

上記から分らないときは

$$(i) a \text{ が等比中項} \Leftrightarrow bc=a^2$$

$$(ii) b \text{ が等比中項} \Leftrightarrow ac=b^2$$

$$(iii) c \text{ が等比中項} \Leftrightarrow ab=c^2$$

の3つの場合分けをするのもアリだと思います.