２次関数演習プリント　解答

１．(1) 札幌学院大　(2) 摂南大

条件から放物線の方程式は　$y=(x-a)^2+3a$　と表せる。

点 $(2,\ 4)$ を通ることから　$(2-a)^2+3a=4$

すなわち　$a^2-a=0$　これを解いて　$a=0,\ 1$

このとき，放物線の方程式は　$y=x^2,\ y=(x-1)^2+3$

原点を通らないから，求める方程式は　$y=(x-1)^2+3$　($y=x^2-2x+4$ でもよい)

(2) 2 点 $(-1,\ 0)$，$(1,\ 0)$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ移動すると，それぞれ

$(-1-1,\ 0+2)$，$(1-1,\ 0+2)$　すなわち　$(-2,\ 2)$，$(0,\ 2)$

移動前の $y=2x^2+ax+b$ のグラフがこの 2 点を通るから

$2=8-2a+b,\ 2=b$

これを解いて　$a={}^{ア}4,\ b={}^{イ}2$

２．[北里大]

$C_1: y=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}-2k$ であるから，C_1 の頂点の座標は　$\left(\frac{3}{2},\ -2k+\frac{9}{4}\right)$

頂点の y 座標が 1 のとき　$-2k+\frac{9}{4}=1$　ゆえに　$k={}^{ア}\frac{5}{8}$

これは $k>0$ を満たす。

$C_2: y=(x+k)^2-k^2+4k$ であるから，C_2 の頂点の座標は　$(-k,\ -k^2+4k)$

C_2 が x 軸と接するとき　$-k^2+4k=0$

よって，$k(k-4)=0$，$k>0$ から　$k={}^{イ}4$

x 軸が C_1 と C_2 のどちらとも共有点をもたないとき，それぞれの頂点の y 座標について

$-2k+\frac{9}{4}<0$　かつ　$-k^2+4k>0$

すなわち　$k>\frac{9}{8}$　かつ　$0<k<4$　$k>0$ であるから　${}^{ウ}\frac{9}{8}<k<4$

３．[近畿大]

$y=x^2-2tx+2t^2-2t+2$ を変形すると　$y=(x-t)^2+t^2-2t+2$

よって，C の頂点の座標は　$(t,\ t^2-2t+2)$

(1) $t=3$ のとき，C の頂点の座標は

$(3,\ 3^2-2\cdot3+2)$　すなわち　$({}^{ア}3,\ {}^{イ}5)$

(2) $t^2-2t+2=(t-1)^2+1$

よって，C の頂点の y 座標が最も小さくなるのは $t={}^{ウ}1$ のときである。

このとき，C の頂点の y 座標は　${}^{エ}1$

(3) $y=x+2$ と $y=x^2-2tx+2t^2-2t+2$ から，y を消去すると

$x+2=x^2-2tx+2t^2-2t+2$

すなわち　$x^2-(2t+1)x+2t^2-2t=0$　……①

ℓ と C が異なる 2 つの共有点をもつための必要十分条件は，2 次方程式 ① の判別式 Dについて，$D>0$ が成り立つことである。

$D=\{-(2t+1)\}^2-4\cdot1\cdot(2t^2-2t)=-4t^2+12t+1$

であるから，$D>0$ より　$-4t^2+12t+1>0$

これを解いて　$\frac{{}^{オ}3-\sqrt{{}^{カ}10}}{2}<t<\frac{{}^{キ}3+\sqrt{{}^{ク}10}}{2}$　……②

(4) 点 A の x 座標を α，点 B の x 座標を β とする。

$\alpha<\beta$ として考えてもよい。

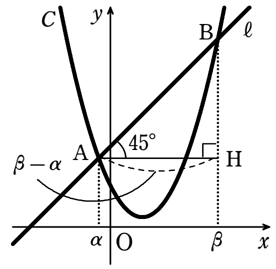
点 A から直線 $x=\beta$ に垂線 AH を引く。

直線 ℓ の傾きは 1 であるから，△ABH は

$\angle\mathrm{BAH}=45^\circ$ の直角二等辺三角形である。

$\mathrm{AH}=\beta-\alpha$ であるから

$\mathrm{AB}=\sqrt{2}(\beta-\alpha)$　……③



① を解くと $x=\frac{2t+1\pm\sqrt{-4t^2+12t+1}}{2}$ であるから，$\alpha<\beta$ より

$\alpha=\frac{2t+1-\sqrt{-4t^2+12t+1}}{2}$　$\beta=\frac{2t+1+\sqrt{-4t^2+12t+1}}{2}$

よって，$\beta-\alpha=\sqrt{-4t^2+12t+1}$ であるから，③ より

$\mathrm{AB}=\sqrt{2}\sqrt{-4t^2+12t+1}$　……④

AB が最大となるのは，② の範囲において，$-4t^2+12t+1$ が最大となるときである。

$-4t^2+12t+1=-4\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+10$ であるから，② の範囲において，$-4t^2+12t+1$ は $t=\frac{3}{2}$ で最大値 10 をとる。

よって，線分 AB の長さは $t=\frac{{}^{ケ}3}{{}^{コ}2}$ のとき最大となり，その最大値は，④ から

$\sqrt{2}\sqrt{10}={}^{サ}2\sqrt{{}^{シ}5}$

４．[広島修道大]

$z=x^2+y^2$ とおく。

$x,\ y$ が $y=-x^2+1$，$-1\leqq x\leqq2$ を満たすから

$z=x^2+(-x^2+1)^2=x^4-x^2+1\ (-1\leqq x\leqq2)$

ここで，$t=x^2$ とおくと　$z=t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

$-1\leqq x\leqq2$ のとき，t は $x=0$ で最小値 0，$x=2$ で最大値 4 をとるから

$0\leqq t\leqq4$　……①

よって，① の範囲において，$z=x^2+y^2$ は

$t=4$ すなわち $x=2$，$y=-3$ で最大値　${}^{ア}13$

$t=\frac{1}{2}$ すなわち $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，$y=\frac{1}{2}$ で最小値　${}^{イ}\frac{3}{4}$

をとる。

５．[名城大]

$x^2-2x-1=t$ とおくと　$t=(x-1)^2-2$

$-1\leqq x\leqq1$ であるから，t は $x=-1$ のとき最大値 2，$x=1$ のとき最小値 -2 をとる。

よって，$-2\leqq t\leqq2$ であり　$y=t^2-6t+5=(t-3)^2-4$

したがって，y は $t=-2$ のとき最大値 ${}^{ア}21$ をとり，$t=2$ のとき最小値 ${}^{イ}-3$ をとる。

６．[東京理科大]

$f(x)=ax^2+4ax+a^2-1$ を変形すると　$f(x)=a(x+2)^2+a^2-4a-1$

区間 $-4\leqq x\leqq1$ の中央の値は　$-\frac{3}{2}$

[1] $a>0$ のとき

$f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，$-4\leqq x\leqq1$ において $f(x)$ は $x=1$ で最大値 $f(1)$ をとる。

$f(1)=a^2+5a-1$ であるから，$f(1)=5$ とすると　$a^2+5a-1=5$

すなわち　$a^2+5a-6=0$　よって　$(a+6)(a-1)=0$

ゆえに　$a=-6,\ 1$

このうち，$a>0$ を満たすものは　$a=1$

[2] $a=0$ のとき　$f(x)=-1$ となり，条件を満たさない。

[3] $a<0$ のとき

$f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であり，$-4\leqq x\leqq1$ において $f(x)$ は $x=-2$ で最大値 $f(-2)$ をとる。

$f(-2)=a^2-4a-1$ であるから，$f(-2)=5$ とすると　$a^2-4a-1=5$

すなわち　$a^2-4a-6=0$　よって　$a=2\pm\sqrt{10}$

このうち，$a<0$ を満たすものは　$a=2-\sqrt{10}$

以上から，求める a の値は　$a=1,\ 2-\sqrt{10}$

７．[関西学院大]

$f(x)=\{x-(3-a)\}^2-2a^2+9a-4\ (1\leqq x\leqq5)$

[1] $1\leqq3-a\leqq5$ すなわち $0\leqq a\leqq{}^{ア}2$ のとき

$f(x)$ は $x=3-a$ で最小値 ${}^{イ}-2a^2+9a-4$ をとる。

[2] $3-a<1$ すなわち $a>2$ のとき

$f(x)$ は $x=1$ で最小値 $f(1)={}^{ウ}-a^2+5a$ をとる。

また，最小値が 0 となるのは　$0\leqq a\leqq2$ のとき，[1] から　$-2a^2+9a-4=0$

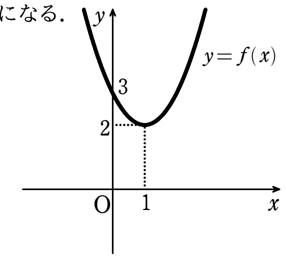
よって　$-(2a-1)(a-4)=0$　$0\leqq a\leqq2$ より　$a={}^{エ}\frac{1}{2}$

$2<a$ のとき，[2] から　$-a^2+5a=0$　よって　$-a(a-5)=0$

$a>2$ より　$a={}^{オ}5$

８．[奈良大]

$f(x)=(x-1)^2+2$より $y=f(x)$ のグラフは，右図のようになる。



最大値について

[1] $a+1\leqq1$ すなわち $a\leqq0$ のとき

$M(a)=f(a)=(a-1)^2+2$

[2] $a+1\geqq1$ すなわち $a\geqq0$ のとき

$M(a)=f(a+2)=(a+1)^2+2$

よって，$b=M(a)$ のグラフは，下の左図.

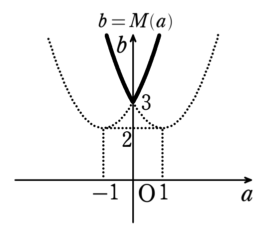
最小値について

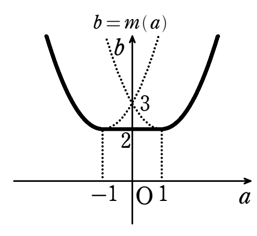
[1] $a+2\leqq1$ すなわち $a\leqq-1$ のとき　$m(a)=f(a+2)=(a+1)^2+2$

[2] $a\leqq1\leqq a+2$ すなわち $-1\leqq a\leqq1$ のとき　$m(a)=f(1)=2$

[3] $a\geqq1$ のとき　$m(a)=f(a)=(a-1)^2+2$

よって，$b=m(a)$ のグラフは，下の右図.





２次関数演習プリント　解答

9．［東北学院大］

(1)　$1=1^2-2a\cdot1+a+2$ から　$a=2$

(2)　$f(x)=x^2-2ax+a+2=(x-a)^2-a^2+a+2$

　[1]　$a<0$ のとき　$m=f(0)=a+2$

　[2]　$0\leqq a\leqq3$ のとき　$m=f(a)=-a^2+a+2$

　[3]　$a>3$ のとき　$m=f(3)=-5a+11$

(3)　[1]　$a<0$ のとき　　(2) から　$a+2>0$

　　よって　　$a>-2$　　　　ゆえに　　$-2<a<0$

　[2]　$0\leqq a\leqq3$ のとき　(2) から　$-a^2+a+2>0$　　　よって　$(a-2)(a+1)<0$

　　ゆえに　　$-1<a<2$　　　したがって　$0\leqq a<2$

　[3]　$3<a$ のとき　　(2) から　$-5a+11>0$

　　よって　　$a<\dfrac{11}{5}$　　　これは $3<a$ を満たさない。

　以上から　　$-2<a<2$

10．［名城大］

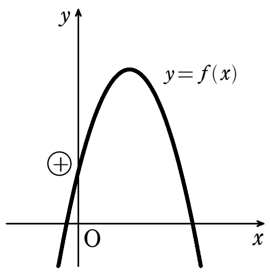
$f(x)=-x^2+(m-10)x-m-14$ とおく。

$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であるから，x 軸の正の部分と負の部分の両方と交わるための条件は

$$f(0)>0$$

すなわち　$-m-14>0$

よって　　$m<$ ア-14



$f(x)$ を変形すると

$$f(x)=-\left(x-\frac{m-10}{2}\right)^2+\frac{m^2}{4}-6m+11$$

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフの軸は

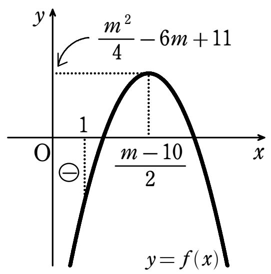
　直線 $x=\dfrac{m-10}{2}$

$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $x>1$ の部分と異なる 2 点で交わるための条件は

　$\dfrac{m^2}{4}-6m+11>0$ ……①

　$\dfrac{m-10}{2}>1$　　　……②

　$f(1)<0$　　　　……③



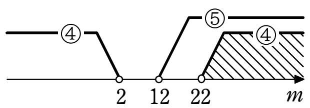
① を解くと　　$m<2$，$22<m$　……④

② を解くと　　$m>12$　……⑤

$f(1)=-25$ であるから，③ は常に成り立つ。

④，⑤ の共通範囲を求めて

　$m>$ イ22



11．［関西学院大］

$f(x)=x^2-(2a+1)x+2a^2$ とする。

$f(x)=0$ の判別式を D とすると　　$D=(2a+1)^2-4\cdot1\cdot2a^2=-4a^2+4a+1$

C は x 軸と 2 個の共有点をもつから　　$D>0$

よって　　　$-4a^2+4a+1>0$　　　すなわち　　$4a^2-4a-1<0$

これを解くと　　ア$\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}<a<$ イ$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

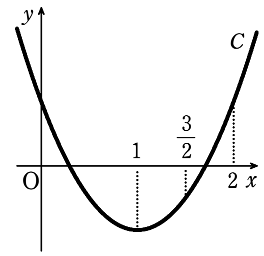
また，$\alpha<1<\beta$ となるとき　　$f(1)<0$

よって　　$1^2-(2a+1)\cdot1+2a^2<0$　　　すなわち　　$2a^2-2a<0$

因数分解して　　$2a(a-1)<0$　　　ゆえに　　ウ$0<a<$ エ1　……①

$0<\alpha<1$ かつ $\dfrac{3}{2}<\beta<2$ となるとき

　$f(0)>0$ かつ $f(1)<0$ かつ $f\left(\dfrac{3}{2}\right)<0$ かつ $f(2)>0$



$f(0)=2a^2$ より，$f(0)>0$ のとき　　$a\neq0$　……②

① より，$f(1)<0$ のとき　　$0<a<1$　……③

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=2a^2-3a+\dfrac{3}{4}$ より，

$2a^2-3a+\dfrac{3}{4}=0$ を解くと　　$a=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{4}$

よって，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)<0$ のとき　　$\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}<a<\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$　……④

$f(2)=2a^2-4a+2=2(a-1)^2$ より，$f(2)>0$ のとき　　$a\neq1$　……⑤

②，③，④，⑤ より，$0<\alpha<1$，$\dfrac{3}{2}<\beta<2$ となるような a の範囲は

　　オ$\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}<a<$ カ1

12．(1) 西南学院大　(2) 名城大

(1)　条件から $a<0$ である。$f(x)=ax^2+8x+b$ とおくと，

　$f(-1)=0$，$f(5)=0$　つまり，$a+b=8$，$25a+b=-40$

　これを解くと，$a=-2$，$b=10$　　これは $a<0$ を満たす。

別解

条件から $a<0$ で，2 次方程式 $ax^2+8x+b=0$ の 2 つの解が $x=-1$，5 である。

解と係数の関係から　　$-1+5=-\dfrac{8}{a}$，$-1\cdot5=\dfrac{b}{a}$

よって　　$a=-2$，$b=10$　　これは $a<0$ を満たす。

(2)　$f(x)\geqq g(x)$ から，$ax^2+2x+2\geqq-\dfrac{2}{3}x+4$，すなわち $ax^2+\dfrac{8}{3}x-2\geqq0$　……①

これを満たす x の範囲が $1\leqq x\leqq b$ であるとき，2 次方程式 $ax^2+\dfrac{8}{3}x-2=0$ ……② は

$x=1$ を解にもつ。　　よって，方程式 ② に $x=1$ を代入して　　$a+\dfrac{8}{3}-2=0$

ゆえに，$a=\dfrac{ア-2}{イ3}$ であり，これは $a<0$ を満たす。

また，このとき不等式 ① は　　$-\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{8}{3}x-2\geqq0$

すなわち　　$x^2-4x+3\leqq0$　　　ゆえに　　$(x-3)(x-1)\leqq0$

よって　　$1\leqq x\leqq3$　　　したがって　　$b=$ ウ3

13．［東北学院大］

$x^2-4x+3<0$ から　　$(x-1)(x-3)<0$　　よって　　$1<x<3$　……①

$x^2-3kx+2k^2\leqq0$ から　$(x-k)(x-2k)\leqq0$　　$k>0$ より　$k\leqq x\leqq2k$　……②

①，② が共通範囲をもつ条件は　　$k<3$　かつ　$2k>1$

よって　　$\dfrac{1}{2}<k<3$

14．［佛教大］

(1)　$\begin{cases}x^2-6x-7\leqq0 & \cdots\cdots\text{(i)}\\ 2x^2-4ax+2a^2-3\leqq0 & \cdots\cdots\text{(ii)}\end{cases}$

　(i) から　　$(x+1)(x-7)\leqq0$　　　よって，(i) の解は　　ア$-1\leqq x\leqq$ イ7

　(ii) から　　$2(x-a)^2\leqq3$　　　よって，(ii) の解は　　$a-\dfrac{\sqrt{ウ6}}{エ2}\leqq x\leqq a+\dfrac{\sqrt{ウ6}}{エ2}$

(2)　(i)，(ii) を同時に満たす実数 x が存在しないのは，次のときである。

　$a+\dfrac{\sqrt{6}}{2}<-1$　　または　　$7<a-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

　すなわち　　$a<\dfrac{カ-2-\sqrt{キ6}}{ク2}$　（オ④）　　または　　$a>\dfrac{コ14+\sqrt{サ6}}{シ2}$　（ケ②）

(3)　(2) で求めた a の値の範囲では，(i)，(ii) を同時に満たす実数 x は存在しないから，整数 x も存在しない。

　よって，n の最小値は　ス0

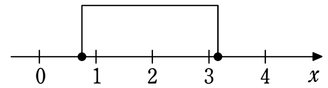
　$\left(a+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)-\left(a-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)=\sqrt{6}$，$7-(-1)=8$，$\sqrt{6}<8$

　よって　　$-1\leqq a-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　かつ　$a+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\leqq7$

　すなわち　$\dfrac{-2+\sqrt{6}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{14-\sqrt{6}}{2}$ のとき，(i)，(ii) を満たす x の値の範囲は

　$a-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\leqq x\leqq a+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ となる。

　$2<\sqrt{6}<3$ であるから，このときの n の値は 2 か 3 である。



　よって，n の最大値は　　セ3

15．［摂南大］

　$x^2-2xy+2y^2-2y+4x+6$

$=x^2-2(y-2)x+2y^2-2y+6=\{x-(y-2)\}^2-(y-2)^2+2y^2-2y+6$

$=(x-y+2)^2+y^2+2y+2=(x-y+2)^2+(y+1)^2+1$

x，y は実数であるから　　$(x-y+2)^2\geqq0$，$(y+1)^2\geqq0$

よって，$x-y+2=0$，$y+1=0$ のとき，すなわち，$x=-3$，$y=-1$ で最小値 1 をとる。

16．［南山大］

　$f(x)-g(x)=x^2+4x+4-(-2x^2+4x+k)=3x^2+4-k$

すべての x について $f(x)>g(x)$ となるとき，$f(x)-g(x)>0$ がすべての x について成り立つから　　$3x^2+4-k>0$

$3x^2\geqq0$ であるから，この不等式がすべての x について成り立つための条件は

　　$4-k>0$　　　すなわち　　ア$k<4$

すべての x_1，x_2 の組について $f(x_1)>g(x_2)$ となるとき，

$\{f(x)$の最小値$\}>\{g(x)$の最大値$\}$ が成り立つ。

$f(x)=x^2+4x+4=(x+2)^2$ より，最小値は　　0

$g(x)=-2x^2+4x+k=-2(x-1)^2+2+k$ より，最大値は　　$2+k$

よって　　$0>2+k$　　　すなわち　　イ$k<-2$