場合の数と確率　演習プリント　解答

１．［法政大］

1 以上 6000 以下の整数の中で，2 で割り切れるもの全体の集合を A，3 で割り切れるもの全体の集合を B，5 で割り切れるもの全体の集合を C とする。

(1)　$6000=3000\times2$ より　　$n(A)=3000$ (個)

(2)　求める整数の個数は 30 で割り切れるもの全体の個数である。

　$6000=200\times30$ より　　$n(A\cap B\cap C)=200$ (個)

(3)　$6000=1000\times6$，$6000=600\times10$，$6000=400\times15$ より

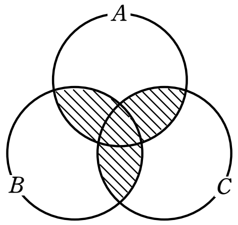
$$n(A\cap B)=1000,\quad n(A\cap C)=600,\quad n(B\cap C)=400$$

よって，求める個数は

$$\begin{aligned}&n(A\cup B\cup C)\\&=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)\\&=3000+2000+1200-1000-600-400+200=4400\end{aligned}$$

(4)　求める場合の数は，右の図の斜線部分の要素の個数であるので

$$\begin{aligned}&n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C)-2n(A\cap B\cap C)\\&=1000+600+400-2\cdot200=1600\end{aligned}$$



２．［名城大改］

(ア)　偶数であるから，一の位は偶数となる。

[1]　一の位が 0 のとき

千，百，十の位は，残り 5 個の数字から 3 個を並べるから

$${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60\ (通り)$$

[2]　一の位が 2，4 のとき

千の位は，残り 5 個の数字から 0 を除いた　4 通り

百，十の位は，残り 4 個の数字から 2 個を並べるから　${}_4P_2$ 通り

よって　　$2\times4\times{}_4P_2=2\times4\times4\cdot3=96$ (通り)

[1]，[2] から，偶数は　　$60+96={}^{ア}156$ (通り)

(イ)　4 の倍数となるのは，下 2 桁が 4 の倍数のときで，次の場合がある。

04，12，20，24，32，40，52

[1]　下 2 桁が 04，20，40 のとき

千，百の位は，残り 4 個の数字から 2 個を並べるから

$$3\times{}_4P_2=3\times4\cdot3=36\ (通り)$$

[2]　下 2 桁が 12，24，32，52 のとき

千の位は，残り 4 個の数字から 0 を除いた　3 通り

百の位は，残り 3 個の数字から選ぶから　3 通り

よって　　$4\times3\times3=36$ (通り)

[1]，[2] から，4 の倍数は　　$36+36={}^{イ}72$ (通り)

(ウ)　3 の倍数となる4 数の組は，次の場合がある。

$(0,1,2,3)$，$(0,1,3,5)$，$(0,2,3,4)$，$(0,3,4,5)$，$(1,2,4,5)$

[1]　4 数の組に0 が含まれるとき

千の位が0 を除く 3 通り，　　百，十，一の位は $3!$ 通り

よって、$4\times3\times3!=4\times3\times6=72$ (通り)

[2]　4 数の組が $(1,2,4,5)$ のとき

$4!=24$ (通り)

[1]，[2] から，3の倍数は　　$72+24={}^{ウ}96$ (通り)

３．［追手門学院大］

(1)　小文字から 2 文字選んで並べる方法は　　${}_4P_2$ 通り

残りの 4 文字の並べ方は　　$4!$ 通り

よって，求める場合の数は　　${}_4P_2\times4!=288$ (通り)

(2)　小文字をまとめて 1 組と考え，この 1 組と X，Y の 2 文字の並び方は　　$3!$ 通り

そのおのおのに対して小文字 4 文字の並び方は　　$4!$ 通り

よって，求める場合の数は　　$3!\times4!=144$ (通り)

(3)　大文字が隣り合う並べ方は，(2) と同様に考えて　　$5!\times2!$ (通り)

6 文字を並べる方法は　　$6!$ 通り

よって，求める場合の数は　　$6!-5!\times2!=720-240=480$ (通り)

(4)　X，Y と 4 個の ○ を 1 列に並べ，4 個の ○ に前から x，y，z，w を入れると考えればよいので，求める場合の数は

$$\frac{6!}{1!1!4!}=30\ (通り)$$

４．［日本女子大改］

(1)　$6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ (通り)

(2)　女男女男女男 と 男女男女男女 の 2 通りの場合がある。

そのおのおのに対して，女子 3 人の並び方は　$3!$ 通り

男子 3 人の並び方は　$3!$ 通り

よって　　$2\times3!\times3!=2\times3\cdot2\cdot1\times3\cdot2\cdot1=72$ (通り)

(3)　女子 3 人を 1 組と考え，この 1 組と男子 3 人の並び方は　$4!$ 通り

そのおのおのに対して，女子 3 人の並び方は　$3!$ 通り

よって　　$4!\times3!=4\cdot3\cdot2\cdot1\times3\cdot2\cdot1=144$ (通り)

(4)　まず、女子 3 人を並べ、その間または両端の4 ヶ所に男子 3 人を 1 人ずつ入れればよい。

よって、$3!\times{}_4P_3=6\times4\cdot3\cdot2=144$ (通り)

(5)　$(6-1)!=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ (通り)

(6)　まず，女子 3 人が輪になって並び，女子と女子の間に男子が 1 人ずつ入れればよい。

よって　　$(3-1)!\times3!=2\cdot1\times3\cdot2\cdot1=12$ (通り)

５．［足利工業大］

(1)　男女 10 人から 4 人を選ぶから　　${}_{10}C_4=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$ (通り)

(2)　A 以外の 9 人から残りの 3 人を選ぶから　　${}_9C_3=84$ (通り)

(3)　男子 3 人の選び方は　　${}_6C_3=20$ (通り)　　女子 1 人の選び方は4 通り

よって，求める選び方は　　$20\times4=80$ (通り)

(4)　すべて男子となる選び方は　　${}_6C_4=15$ (通り)

よって，求める選び方は　　$210-15=195$ (通り)

６．［東京理科大］

(1)　$\dfrac{8!}{3!3!2!}=560$ (通り)

(2)　2 個の青い玉をまとめて 1 個とみなし，赤い玉 3 個，白い玉 3 個との合わせて 7 個の順列の総数を求めて　　$\dfrac{7!}{3!3!1!}=140$ (通り)

(3)　赤い玉が 2 個以上続かない並べ方は，先に白い玉 3 個と青い玉 2 個を 1 列に並べ，その両端または間の 6 か所から 3 か所を選んで赤い玉を 1 個ずつ入れることで得られる。そのような並べ方の総数は　　$\dfrac{5!}{3!2!}\cdot{}_6C_3=200$ (通り)

よって，赤い玉が 2 個以上続く並べ方の総数は　　$560-200=360$ (通り)

７．［関西学院大］

1 が 2 個，2 が 1 個，3 が 2 個，4 が 1 個あるから，6 桁の整数の総数は

$$\frac{6!}{2!1!2!1!}={}^{ア}180\ (個)$$

最高位の数字が 1 である整数の総数は，残りの数字 1，2，3，3，4 の順列の総数であるから　　$\dfrac{5!}{1!1!2!1!}={}^{イ}60$ (個)

最高位の数字が 2 である整数の総数は，残りの数字 1，1，3，3，4 の順列の総数であるから　　$\dfrac{5!}{2!2!1!}={}^{ウ}30$ (個)

最高位の数字が 3 である最初の整数は　　${}^{エ}311234$

311□□□ の形の数の総数は，2，3，4 の順列の総数であるから　　$3!=6$ (個)

312134 は 312□□□の形の数の中で最小であるから，全体の

$$60+30+6+1={}^{オ}97\ (番目)$$

８．［松山大］

(1)　E が 3 個，L が 2 個，X，C，N，T がそれぞれ 1 個ずつあるから，この 9 文字の並べ方の総数は　　$\dfrac{9!}{3!2!1!1!1!1!}={}^{ア}30240$ (通り)

L が続けて並ぶ並べ方は，2 個の L を 1 文字と考えて　　$\dfrac{8!}{3!1!1!1!1!1!}=6720$ (通り)

よって，L が続けて並ばない並べ方は　　$30240-6720={}^{イ}23520$ (通り)

また，3 個の E を除く 6 文字を ○ で表したとき，E が続けて並ばないように並べるには，6 個の ○ の両端か間の 7 か所から 3 か所を選んで E を並べればよい。

∨○∨○∨○∨○∨○∨○∨

E を除く 6 文字の順列の総数は　　$\dfrac{6!}{2!1!1!1!1!}=360$ (通り)

そのおのおのの場合について，3 個の E の位置の選び方が　${}_7C_3=35$ (通り)

ゆえに，E が続けて並ばない並べ方の総数は　　$360\times35={}^{ウ}12600$ (通り)

(2)　取り出した 4 文字について

[1]　E を 3 個含む場合

残りの 1 文字の選び方と，4 文字の並べ方を考えて　　${}_5C_1\times\dfrac{4!}{3!1!}=20$ (通り)

[2]　E，L をともに 2 個ずつ含む場合

4 文字の並べ方は　　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$ (通り)

[3]　E，L のいずれか一方のみを 2 個含む場合

2 個含む文字の選び方が E，L の　2 通り

そのおのおのについて，残りの 2 文字の選び方と，4 文字の並べ方を考えて

$${}_5C_2\times\frac{4!}{2!1!1!}=120\ (通り)$$

よって　　$2\times120=240$ (通り)

[4]　4 文字がすべて異なる場合

4 文字の選び方と，その並べ方を考えて　　${}_6C_4\times4!=360$ (通り)

[1]～[4] より，求める並べ方の総数は　　$20+6+240+360={}^{エ}626$ (通り)

9．［信州大］

白玉 1 個を固定して，残り 12 個を円形に並べると，12 個の並べ方の総数は

$$\frac{12!}{2!4!6!}=13860\ (\text{通り})$$

そのうち，線対称になるものは，赤玉 1 個，青玉 2 個，黄玉 3 個の順列の数だけあり

$$\frac{6!}{1!2!3!}=60\ (\text{通り})$$

線対称でないものは　$13860-60=13800$ (通り)

線対称でないものの 1 つ 1 つに対して，裏返すと一致するものが他に必ず 1 つずつあるから，ネックレスの種類は　$60+\frac{13800}{2}=6960$ (通り)

10．［摂南大］

(1)　$3^6=729$ (通り)

(2)　各グループは 2 人以上だから，2 つのグループに分ける方法は，

(2 人，4 人) または (3 人，3 人) である。

(2 人，4 人) のとき　${}_6C_2 \cdot {}_4C_4=15$

(3 人，3 人) のとき　$\frac{{}_6C_3 \cdot {}_3C_3}{2!}=10$

よって，求める場合の数は　$15+10=25$ (通り)

(3)　各グループは 1 人以上だから，3 つのグループに分ける方法は，

(1 人，1 人，4 人)，(1 人，2 人，3 人)，(2 人，2 人，2 人)

のいずれかである。

(1 人，1 人，4 人) のとき　$\frac{{}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_4}{2!}=15$ (通り)

(1 人，2 人，3 人) のとき　${}_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3=60$ (通り)

(2 人，2 人，2 人) のとき　$\frac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2}{3!}=15$ (通り)

よって，求める場合の数は　$15+60+15=90$ (通り)

(4)　[1]　全員が 1 つの部屋に入るとき　3 (通り)

[2]　男女 1 人ずつと男女 2 人ずつの 2 組に分けるとき

男女 1 人ずつの組の作り方は $3^2=9$ 通りあり，その組の部屋の決め方は 3 通りある。

また，残りの組の部屋の決め方は 2 通りであるから

$9 \cdot 3 \cdot 2=54$ (通り)

[3]　男女 1 人ずつ 3 組に分けるとき

男子，女子の分け方がそれぞれ 3! 通りずつあるから

$(3!)^2=36$ (通り)

以上より，求める場合の数は

$3+54+36=93$ (通り)

11．［同志社大］

$n=3$ のとき，2 つの集合に含まれる整数は「1 個と 2 個」であるから　$S_2={}_3C_1={}^{ア}3$

3 つの集合に含まれる整数は「1 個，1 個，1 個」であるから　$S_3={}^{イ}1$

$n=4$ のとき，2 つの集合に含まれる整数は「1 個と 3 個」，「2 個と 2 個」であるから

$$S_2={}_4C_1+\frac{{}_4C_2}{2!}={}^{ウ}7$$

3 つの集合に含まれる整数は「1 個，1 個，2 個」であるから

$$S_3={}_4C_2={}^{エ}6$$

2 以上の整数 n に対して，2 つの集合を A，B と区別すると，1，2，3，……，n がそれぞれ A，B のどちらかに属するから，2^n 通りある。

このうち，すべてが A，B の一方に属する場合を除くと　2^n-2 通り

A，B の区別をなくして　$S_2=\frac{2^n-2}{2}={}^{オ}2^{n-1}-1$

12．［星薬科大］

(1)　右へ 1 区画進むことを →，上へ 1 区画進むことを ↑ で表すと，最短の道順は，→ 7 個，↑ 4 個の順列で表される。

よって，道順は全部で　$\frac{11!}{7!4!}=330$ (通り)

(2)　A から P までの最短の道順は

$$\frac{4!}{3!1!}=4\ (\text{通り})\quad \cdots\cdots ①$$

P から B までの最短の道順は

$$\frac{7!}{4!3!}=35\ (\text{通り})$$

よって，求める道順の総数は　$4\times35=140$ (通り)

(3)　P を通るが Q は通らない道順は，(2) から

140 −(P と Q をともに通る場合の数) 通り

P から Q までの最短の道順は　$\frac{5!}{4!1!}=5$ (通り)

Q から B までの最短の道順は　1 通り

よって，① から，P と Q をともに通る最短の道順は

$4\times5\times1=20$ (通り)

ゆえに，求める道順の総数は　$140-20=120$ (通り)

13．［立命館大］

$x+y+z=9$ ($x\geqq0$，$y\geqq0$，$z\geqq0$) を満たす整数の組の個数は，異なる 3 種のものから 9 個を取る重複組合せの数で

$${}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2={}^{ア}55\ (\text{組})$$

$x-1=X$，$y-1=Y$，$z-1=Z$ とおく。

$x+y+z=9$ から　$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=9$

よって　$X+Y+Z=6$　($X\geqq0$，$Y\geqq0$，$Z\geqq0$)

これを満たす整数の組の個数は，異なる 3 種のものから 6 個を取る重複組合せの数で

$${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2={}^{イ}28\ (\text{組})$$

14．［中央大］

さいころを 2 回投げたときの目の出方は　$6^2=36$ (通り)

2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-a)^2-4\cdot1\cdot b=a^2-4b$$

D の値を調べると，右の表のようになる。

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	−	−	−	−	−	−
2	0	−	−	−	−	−
3	5	1	−	−	−	−
4	12	8	4	0	−	−
5	21	17	13	9	5	1
6	32	28	24	20	16	12

(− は負の値であることを示す)

(1)　方程式が重解をもつのは，$D=0$ のときで，

右の表から　$(a,\ b)=(2,\ 1)$，$(4,\ 4)$　の 2 通り

よって，求める確率は　$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

(2)　方程式が異なる 2 つの実数解をもつのは，

$D>0$ のときで，そのような $(a,\ b)$ の組は，

右の表から　17 通り

よって，求める確率は　$\frac{17}{36}$

(3)　方程式の解は　$x=\frac{a\pm\sqrt{D}}{2}$　であり，解がすべて無理数となるのは，$\sqrt{D}$ が無理数のときである。

(2) の 17 通りのうち，D が平方数となるのは

$$(a,\ b)=(3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 4),\ (5,\ 6),\ (6,\ 5)$$

の 5 通りで，これ以外の 12 通りについて，$\sqrt{D}$ は無理数となる。

よって，求める確率は　$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

15．［東京都市大］

S が奇数であるのは，3 回とも奇数の目が出る場合であるから，その確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3={}^{ア}\frac{1}{8}$$

S が 3 の倍数であるのは，3 回のうち，少なくとも 1 回は 3 または 6 の目が出る場合である。

3 回とも 3 と 6 の目が出ない確率は　$\left(\frac{4}{6}\right)^3=\frac{8}{27}$

よって，S が 3 の倍数である確率は

$$1-\frac{8}{27}={}^{イ}\frac{19}{27}$$

16. ［学習院大］

9 個の玉から同時に 4 個の玉を取り出す方法は　${}_9C_4=126$（通り）

(1)　4 個の玉の中に白玉が入っていないのは，赤玉，青玉の中から 4 個取り出すときであるから　${}_7C_4=35$（通り）

よって，求める確率は　$\dfrac{35}{126}=\dfrac{5}{18}$

(2)　4 個の玉の中に青玉が入っていないのは，赤玉，白玉の中から 4 個取り出すときであるから　${}_6C_4=15$（通り）

よって，求める確率は　$1-\dfrac{15}{126}=\dfrac{37}{42}$

(3)　4 個の玉の中に赤玉，青玉，白玉のどれもが入っているのは，次の場合である。

[1]　赤玉を 2 個，青玉を 1 個，白玉を 1 個取り出すとき

$${}_4C_2\times{}_3C_1\times{}_2C_1=36 \text{（通り）}$$

[2]　赤玉を 1 個，青玉を 2 個，白玉を 1 個取り出すとき

$${}_4C_1\times{}_3C_2\times{}_2C_1=24 \text{（通り）}$$

[3]　赤玉を 1 個，青玉を 1 個，白玉を 2 個取り出すとき

$${}_4C_1\times{}_3C_1\times{}_2C_2=12 \text{（通り）}$$

[1]～[3] から，求める確率は　$\dfrac{36+24+12}{126}=\dfrac{4}{7}$

17. ［鳥取大］

玉がなくなるまで袋から玉を取り出すとき，その取り出し方の総数は，白玉 6 個，赤玉 5 個を 1 列に並べる順列の総数であるから

$$\frac{11!}{6!5!}=462 \text{（通り）}$$

これらは同様に確からしい。

(1)　最初に赤玉が連続して 4 個出て，かつ最後に赤玉が出る取り出し方は 1 通りであるから，求める確率は　$\dfrac{1}{462}$

(2)　白玉と赤玉が交互に出るのは，最初に白玉が出てその後交互に赤玉，白玉，……と出る場合である。

このような取り出し方は 1 通りであるから，求める確率は　$\dfrac{1}{462}$

(3)　もらった合計額が支払った合計額以下であるのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。

[1]　白玉を 1 個，赤玉を 4 個取り出す場合

その確率は　$\dfrac{{}_6C_1\times{}_5C_4}{{}_{11}C_5}=\dfrac{30}{462}$

[2]　赤玉を 5 個取り出す場合

その確率は　$\dfrac{{}_5C_5}{{}_{11}C_5}=\dfrac{1}{462}$

[1]，[2] は互いに排反であるから，もらった合計額が支払った合計額以下である確率は　$\dfrac{30}{462}+\dfrac{1}{462}=\dfrac{31}{462}$

よって，求める確率は　$1-\dfrac{31}{462}=\dfrac{431}{462}$

18. ［関西大］

カードの取り出し方の総数は　${}_{10}C_4$ 通り

最大の数が 6 となる取り出し方の総数は，1 ～ 5 の 5 枚のカードから 3 枚を引く場合の数であるから　${}_5C_3$ 通り

よって，最大の数が 6 となる確率は　$\dfrac{{}_5C_3}{{}_{10}C_4}={}^{ア}\dfrac{1}{21}$

最大の数が 9，最小の数が 1 となる取り出し方の総数は，2 ～ 8 の 7 枚のカードから 2 枚を引く場合の数であるから　${}_7C_2$ 通り

同様に考えて，最大の数が 9，最小の数が 2 となる取り出し方の総数は　${}_6C_2$ 通り

最大の数が 10，最小の数が 1 となる取り出し方の総数は　${}_8C_2$ 通り

最大の数が 10，最小の数が 2 となる取り出し方の総数は　${}_7C_2$ 通り

以上から，求める確率は　$\dfrac{{}_7C_2+{}_6C_2+{}_8C_2+{}_7C_2}{{}_{10}C_4}=\dfrac{85}{210}={}^{イ}\dfrac{17}{42}$

19. ［慶応義塾大］

(1)　最大値が 4 以下であるのは，3 個のさいころの目がすべて 4 以下のときであり，

その確率は　$\left(\dfrac{4}{6}\right)^3=\dfrac{8}{27}$

(2)　最大値が 4 であるという事象は，最大値が 4 以下であるという事象から，最大値が 3 以下であるという事象を除いたものである。

最大値が 3 以下である確率は，(1) と同様に考えて　$\left(\dfrac{3}{6}\right)^3=\dfrac{1}{8}$

よって，求める確率は　$\dfrac{8}{27}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{37}{216}$

(3)　最大値が 4 であるという事象を A，少なくとも 1 個の目が 1 であるという事象を B とすると，求める確率は　$P_A(B)$

事象 $A\cap B$ が起こるのは，3 個のさいころの目の組合せが，

(1，1，4)，(1，2，4)，(1，3，4)，(1，4，4)

の場合である。

3 個のさいころの目を区別すると，目の組合せが (1，1，4)，(1，4，4) となるのは 3 通りずつあり，(1，2，4)，(1，3，4) となるのは 3! 通りずつある。

ゆえに　$P(A\cap B)=\dfrac{3\times2+3!\times2}{6^3}=\dfrac{18}{216}$

よって，(2) から，求める確率は　$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{18}{216}\div\dfrac{37}{216}=\dfrac{18}{37}$

20. ［埼玉医科大］

12 枚の札から 3 枚の札を取り出す方法は　${}_{12}C_3$ 通り

(1)　赤，青，黄のどの色が同じになるかが　${}_3C_1$ 通り

その色について，どの番号を取り出すかが　${}_4C_3$ 通り

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{{}_3C_1\times{}_4C_3}{{}_{12}C_3}=\dfrac{3\times4}{220}=\dfrac{3}{55}$

(2)　どの 3 つの番号を取り出すかが　${}_4C_3$ 通り

そのおのおのに対して，色の選び方は 3^3 通りずつあるから，番号が全部異なる場合は

$${}_4C_3\times3^3 \text{ 通り}$$

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{{}_4C_3\times3^3}{{}_{12}C_3}=\dfrac{4\times27}{220}=\dfrac{27}{55}$

(3)　どの 3 つの番号を取り出すかが ${}_4C_3$ 通りあり，取り出した 3 つの番号の色の選び方が ${}_3P_3$ 通りあるから，色も番号も全部異なる場合は　${}_4C_3\times{}_3P_3$ 通り

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{{}_4C_3\times{}_3P_3}{{}_{12}C_3}=\dfrac{4\times6}{220}=\dfrac{6}{55}$

21. ［関西学院大］

サイコロの目が 1 であるという事象を X_1，2 か 3 であるという事象を X_2，4 であるという事象を Y_1，5 か 6 であるという事象を Y_2 とする。

サイコロを 2 回投げた後，点 P が原点にあるのは，

X_1 が 1 回，X_2 が 1 回　または　Y_1 が 1 回，Y_2 が 1 回

起こるときである。

それぞれの確率は等しく，その確率は　${}_2C_1\left(\dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{2}{6}\right)=\dfrac{1}{9}$

よって，点 P が原点にある確率は　$\dfrac{1}{9}\times2={}^{ア}\dfrac{2}{9}$

また，点 P の x 座標が負であるのは，

X_2 が 2 回　または　X_2 が 1 回，Y_1 が 1 回　または　X_2 が 1 回，Y_2 が 1 回

起こるときである。

ゆえに，その確率は　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^2+{}_2C_1\left(\dfrac{2}{6}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)+{}_2C_1\left(\dfrac{2}{6}\right)\left(\dfrac{2}{6}\right)={}^{イ}\dfrac{4}{9}$

サイコロを 4 回投げた後，点 P が原点にあるのは，

X_1 が 2 回，X_2 が 2 回　または　Y_1 が 2 回，Y_2 が 2 回

または　X_1，X_2，Y_1，Y_2 がそれぞれ 1 回ずつ

起こるときである。

ゆえに，その確率は　${}_4C_2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{2}{6}\right)^2\times2+4!\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{2}{6}\right)^2={}^{ウ}\dfrac{1}{9}$

また，点 P が (2，-2) にあるのは，X_1 が 2 回，Y_2 が 2 回起こるときである。

ゆえに，その確率は　${}_4C_2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{2}{6}\right)^2={}^{エ}\dfrac{1}{54}$

サイコロを 5 回投げた後，点 P が (-1，0) にあり，それまでに通った点がすべて x 軸上にあるのは，X_1 が 2 回，X_2 が 3 回起こるときである。

よって，その確率は　${}_5C_2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{2}{6}\right)^3={}^{オ}\dfrac{5}{486}$

22.［京都産業大］

(1)　4人の手の出し方の総数は

$$3^4 = {}^{ア}81 \text{（通り）}$$

1回目に3人が負ける場合，敗者3人の選び方は

$${}_4C_3 = 4 \text{（通り）}$$

そのおのおのに対して，負ける手は　3通り

よって，1回目に3人が負ける確率は

$$\frac{4\times 3}{3^4} = {}^{イ}\frac{4}{27}$$

同様に考えて，1回目に2人が負ける確率は

$$\frac{{}_4C_2\times 3}{3^4} = {}^{ウ}\frac{2}{9}$$

また，1回目に1人が負ける確率は，(イ)，(ウ) と同様に考えて

$$\frac{{}_4C_1\times 3}{3^4} = \frac{4}{27} \quad \cdots\cdots ①$$

1回目にあいこになるのは誰も負けない場合であるから，(イ)，(ウ) と ① より，その確率は　$1-\left(\frac{4}{27}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}\right) = {}^{エ}\frac{13}{27}$

(2)　1回目で2人が負ける確率は，(ウ) から　$\frac{2}{9}$

2回目は2人でじゃんけんをする。

そのとき，どちらか一方が勝つ確率は，(イ)，(ウ) と同様に考えて

$$\frac{{}_2C_1\times 3}{3^2} = \frac{2}{3}$$

よって，1回目で2人が負け，2回目で優勝者が決まる確率は

$$\frac{2}{9}\times\frac{2}{3} = {}^{オ}\frac{4}{27}$$

また，ちょうど2回目で優勝者が決まるのは，次の [1]～[3] のいずれかの場合である。

[1]　1回目があいこで，2回目で3人負ける場合

その確率は，(イ)，(エ) から

$$\frac{13}{27}\times\frac{4}{27} = \frac{52}{729} \quad \cdots\cdots ②$$

[2]　1回目で1人負けて，2回目で2人負ける場合

その確率は，(オ) と同様に考えて

$$\frac{4}{27}\times\frac{{}_3C_2\times 3}{3^3} = \frac{36}{729}$$

[3]　1回目で2人負け，2回目で1人負ける場合

その確率は，(オ) から　$\frac{4}{27}$

[1]～[3] は互いに排反であるから，ちょうど2回目で優勝者が決まる確率は

$$\frac{52}{729}+\frac{36}{729}+\frac{4}{27} = {}^{カ}\frac{196}{729}$$

(3)　ちょうど2回目で優勝者が決まるという事象を A，1回目があいこであるという事象を B とすると，求める確率は　$P_A(B)$

② より $P(A\cap B)=\frac{52}{729}$，(カ) より $P(A)=\frac{196}{729}$ であるから，求める確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{52}{729}\div\frac{196}{729} = {}^{キ}\frac{13}{49}$$

23.［大阪府立大］

(1)　はずれくじは8本ある。

4人のうち少なくとも1人が当たるという事象は，4人ともはずれるという事象の余事象である。

4人ともはずれる確率は　$\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10} = \frac{14}{143}$

よって，求める確率は　$P_1 = 1-\frac{14}{143} = \frac{129}{143}$

(2)　4人のうち少なくとも2人が当たるという事象は，

4人ともはずれる，または4人のうち1人だけが当たるという事象

の余事象である。

(1) から，4人ともはずれる確率は　$\frac{14}{143}$

4人のうち A だけが当たる確率は　$\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10} = \frac{14}{143}$

4人のうち B，C，D だけが当たる確率も，それぞれ　$\frac{14}{143}$

よって，4人のうち1人だけが当たる確率は　$\frac{14}{143}\times 4 = \frac{56}{143}$

したがって，求める確率は　$P_2 = 1-\left(\frac{14}{143}+\frac{56}{143}\right) = \frac{73}{143}$

(3)　4人のうち少なくとも1人が当たりくじを引くという事象を E とし，D が当たるという事象を D とすると，求める確率 P_3 は

$$P_3 = P_E(D) = \frac{P(E\cap D)}{P(E)}$$

(1) から　$P(E) = P_1 = \frac{129}{143}$

また　$P(E\cap D) = P(D) = {}_5C_1\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{1}{10} = \frac{5}{13}$

よって，求める確率は　$P_3 = \frac{5}{13}\div\frac{129}{143} = \frac{55}{129}$

24.［東北学院大］

取り出した1個が，A 機械の製品であるという事象を A，B 機械であるという事象を B，不良品であるという事象を E とすると

$$P(A)=\frac{5}{8},\quad P(B)=\frac{3}{8},\quad P_A(E)=\frac{4}{100},\quad P_B(E)=\frac{7}{100}$$

(1)　求める確率は $P(E)$ であるから

$$P(E) = P(A\cap E)+P(B\cap E) = P(A)P_A(E)+P(B)P_B(E)$$

$$= \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{100}+\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{100} = \frac{41}{800}$$

(2)　求める確率は $P_E(A)$ であるから

$$P_E(A) = \frac{P(A\cap E)}{P(E)} = \frac{P(A)P_A(E)}{P(E)} = \frac{20}{800}\div\frac{41}{800} = \frac{20}{41}$$

25.［早稲田大］

袋の中には合計 n 個の玉が入っているから

$$P_n = \frac{{}_{n-7}C_3\cdot{}_7C_2}{{}_nC_5} = \frac{\frac{(n-7)(n-8)(n-9)}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{7\cdot6}{2\cdot1}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{420(n-7)(n-8)(n-9)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

ここで

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{420(n-6)(n-7)(n-8)}{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}\times\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{420(n-7)(n-8)(n-9)}$$

$$= \frac{(n-4)(n-6)}{(n+1)(n-9)}$$

$\frac{P_{n+1}}{P_n}<1$ とすると　$(n-4)(n-6)<(n+1)(n-9)$

よって　$33<2n$　　ゆえに　$n>\frac{33}{2}$

$n>\frac{33}{2}$ を満たす最小の自然数 n は　$n=17$

同様に，$\frac{P_{n+1}}{P_n}>1$ とすると　$n<\frac{33}{2}$

したがって，$10\leqq n\leqq 16$ のとき　$P_n<P_{n+1}$

$n\geqq 17$ のとき　$P_n>P_{n+1}$

ゆえに　$P_{10}<\cdots\cdots<P_{16}<P_{17}$

$P_{17}>P_{18}>\cdots\cdots$

よって，P_n を最大にする n の値は　$n=17$