微分係数と導関数の定義

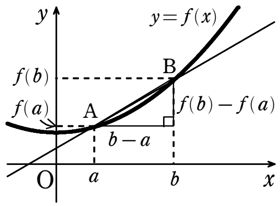
◎ 微分係数と導関数

●平均変化率

関数 $y=f(x)$ において，
x の値が a から b まで変化するとき，

$$\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を，$x=a$ から $x=b$ までの，$f(x)$ の **平均変化率** という。



この平均変化率は，関数 $y=f(x)$ のグラフ上の2点 A$(a,\ f(a))$，B$(b,\ f(b))$ を通る直線 AB の傾きを表している。

● 微分係数

関数 $f(x)$ の，$x=a$ から $x=a+h$ までの平均変化率 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ において，
h が 0 に限りなく近づくとき，この平均変化率が一定の値に限りなく近づくならば，
その極限値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における **微分係数** といい，$f'(a)$ で表す。

$f(x)$ の $x=a$ における微分係数の定義 $f'(a)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

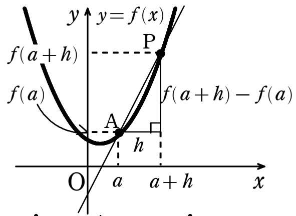
関数 $f(x)=x^2$ の $x=2$ における微分係数は

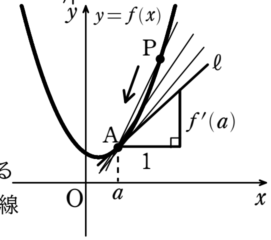
$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$$

$f'(2)=4$ は、関数 $f(x)=x^2$ の $x=2$ における接線の傾きが 4 であることを表している。
次の図で微分係数 $f'(a)$ について考えてみよう。

関数 $f(x)$ が微分係数 $f'(a)$ をもつとする。
関数 $y=f(x)$ のグラフ上に2点
$(a,\ f(a))$，P$(a+h,\ f(a+h))$をとると，
直線 AP の傾き $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ は，
関数 $f(x)$ の $x=a$ から $x=a+h$ までの
平均変化率に等しい。





h が 0 に限りなく近づくとき，点 P は点 A に限りなく
近づくから，直線 AP は点 A を通り傾きが $f'(a)$ の
直線 ℓ に限りなく近づく。
この直線 ℓ を，関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 A における
接線 といい，A を **接点** という。また，直線 ℓ はこの曲線
に点 A で **接する** という。

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 A$(a,\ f(a))$ における接線の傾き は，関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい。

● 導関数

関数 $f(x)$ において、a の値を決めるとそれに応じて，$f'(a)$ の値がただ1つ定まる。
すなわち a を変数とみると，$f'(a)$ は a の関数である。
一般に，関数 $f(x)$ において，x のとる各値 a に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させると，
x の関数が得られる。このようにして得られる新しい関数を $f(x)$ の **導関数** といい，
$f'(x)$ で表す。

導関数 $f'(x)$の定義 $f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$