数列の和

数列$\{a_n\}$について．$a_n=2n^2-3n+4$のとき．a_1からa_nまでの和S_nは？

$\{a_n\}$：3，6，13，24，…

$S_n=3+6+13+24+\cdots$　としてしまうと．計算が実質的に不可能である。

そこで

$\{a_n\}$：$2\cdot1^2-3\cdot1+4,\ 2\cdot2^2-3\cdot2+4,\ 2\cdot3^2-3\cdot3+4,\ \cdots,\ 2n^2-3n+4$

のように．あえて．$a_1,a_2,a_3\cdots$の各項を和の形のままとっておくと．

$$S_n=(\underbrace{2\cdot1^2}_{①}\underbrace{-3\cdot1}_{②}\underbrace{+4}_{③})+(\underbrace{2\cdot2^2}_{①}\underbrace{-3\cdot2}_{②}\underbrace{+4}_{③})+(\underbrace{2\cdot3^2}_{①}\underbrace{-3\cdot3}_{②}\underbrace{+4}_{③})+\cdots+(\underbrace{2n^2}_{①}\underbrace{-3n}_{②}\underbrace{+4}_{③})$$

$$=\underbrace{2(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)}_{①}\underbrace{-3(1+2+3+\cdots+n)}_{②}+\underbrace{(4+4+4+\cdots+4)}_{③}$$

①，②，③の括弧の中の計算結果があれば．和S_nが求まる

① の括弧内：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=$ ▨ ← これが分かれば求まる．

② の括弧内：$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=$ ▨ ← これが分かれば求まる．

③ の括弧内：$4+4+4+\cdots+4=\sum_{k=1}^{n}4=$ ▨ ← これが分かれば求まる．

▨ の部分は．結果を公式として．覚えて使うことになる。（一度は．導きましょう）

（数列で出てくる公式は．仕組みや成り立ちを理解しておくと．別の場面で役立つことがある）

◎ 数列の和

数列の和の問題

1、等差 or 等比は、公式を利用

2、特殊な和

① パタパタ法（差の形を作る）

② $S-rS$ 法（等差）×（等比）の和

3、1，2以外は、Σ公式で計算

Σ公式

1. $\sum_{k=1}^{n}c=nc$
2. $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$
3. $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
4. $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

1について．

Σ（kの1次式）⇒ 等差の和の公式 or Σ公式で計算

$\Sigma r^{(k\text{の1次式})}$ ⇒ 等比の和の公式で計算

2について．

① は $\Sigma\dfrac{▨}{k\text{の2次式}}$，$\Sigma\dfrac{▨}{k\text{の3次式}}$ ⇒ 部分分数分解で差の形を作る

Σ（根号$\sqrt{▨}$を含む式）⇒ 有理化で差の形を作る

② は、$\underbrace{\Sigma(k\text{の1次式})\cdot r^{(k\text{の1次式})}}_{(\text{等差})\times(\text{等比})\text{の和}}$ ← 一般項が積の形は注意する

3について．

Σ（kの2次式），Σ（kの3次式）⇒ Σ公式で計算

数列の一般項（第n項）やΣの後ろの一般項を見て．判断できるとよい。