式と証明＆複素数と方程式

1．［(1) 関西大　(2) 摂南大］
次の空欄を埋めよ。

(1)　$(x-2)^{11}$ の x^2 の係数は $^{\text{ア}}\boxed{\quad}$ であり，x^3 の係数は $^{\text{イ}}\boxed{\quad}$ である。

(2)　$(a+2b-c)^4$ の展開式における ab^2c の係数は $-{}^{\text{ア}}\boxed{\quad}$ である。

　また，$(3a-b+2c)^6$ の展開式における $a^2b^2c^2$ の係数は $^{\text{イ}}\boxed{\quad}$ である。

2．［(1) 愛知工業大　(2) 近畿大］
次の問いに答えよ。

(1)　$\left(x-\dfrac{1}{2x^2}\right)^{12}$ の展開式において，x^3 の係数と定数項を求めよ。

(2)　$\left(x^2+x+\dfrac{1}{x}\right)^8$ を展開したときの x の係数を求めよ。

3．［(1) 獨協大　(2) 駒澤大］
次の問いに答えよ。

(1)　分数式 $\dfrac{\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}}{3+\dfrac{2}{x-1}}$ を簡単にすると $\boxed{\quad}$ である。

(2)　$\dfrac{x^2+8x+7}{x^2-7x+10}\div\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$ を計算せよ。

4．［(1) 西日本工業大　(2) 東京電機大　(3) 日本大］］
次の問いに答えよ。

(1)　等式 $a(x-1)^2+b(x-1)+c=x^2+1$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(2)　等式 $\dfrac{4x+5}{2x^2+5x-3}=\dfrac{a}{2x-1}+\dfrac{b}{x+3}$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

(3)　等式 $x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=ax(x-1)(x+1)+bx(x-1)+cx+d$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

5．［(1) 京都産業大　(2) 北里大］
次の空欄を埋めよ。

(1)　整式 $P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りが 1 であり，$x-2$ で割ったときの余りが 7 であるとき，$P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの余りは $\boxed{\quad}$ である。

(2)　整式 $f(x)$ を $x-3$ で割った余りは 2 で，$(x-2)(x+5)$ で割った余りは $3x+5$ である。このとき，$f(x)$ を $x-2$ で割った余りは $^{\text{ア}}\boxed{\quad}$ である。また，$f(x)$ を $(x-3)(x+5)$ で割った余りは $^{\text{イ}}\boxed{\quad}$ である。

6．［(1) 東京都市大　(2) 倉敷芸術科学大］］
次の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{a+b}{3}=\dfrac{b+c}{4}=\dfrac{c+a}{5}$，$abc\neq0$ のとき，$\dfrac{a^2b+b^2c+c^2a}{abc}$ の値は $\boxed{\quad}$ である。

(2)　$a+b+c=0$ のとき，$\dfrac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{c^2}{(c+a)(c+b)}=3$ が成り立つことを証明せよ。

7．［龍谷大］
次の不等式を証明せよ。また，等号が成立するのはどんな場合か述べよ。

(1)　x と y が実数のとき，$x^2-4x+y^2+2y+5\geqq0$

(2)　$x>0$ かつ $y>0$ のとき，$\sqrt{2(x+y)}\geqq\sqrt{x}+\sqrt{y}$

8．［(1) 名古屋経済大改　(2) 公立はこだて未来大］
次の不等式を証明せよ。また，等号が成立するのはどんな場合か述べよ。

(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{b}\right)\geqq16$

(2)　すべての実数 x，y に対して，$|x+y|\leqq|x|+|y|$

9．［京都産業大］
$(3+i)x+(1-i)y=5+3i$ を満たす実数 x，y の組は，$(x,\ y)={}^{\text{ア}}\boxed{\quad}$ である。

また，$z^2=i$ となる複素数 z をすべて求めて，$a+bi$（a，b は実数）の形で表すと $^{\text{イ}}\boxed{\quad}$ となる。ただし，i は虚数単位とする。

10．［(1) 甲南大　(2) 広島修道大改］
次の空欄を埋めよ。

(1)　2 次方程式 $x^2-2x+3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2={}^{\text{ア}}\boxed{\quad}$，$\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}={}^{\text{イ}}\boxed{\quad}$ である。

(2)　$x=2+3i$ のとき，$x^3-6x^2+16x-3=\boxed{\quad}$ である。

11．［甲南大］
a，b を実数とし，3 次方程式 $x^3+ax^2+8x+b=0$ の 1 つの解が $1+i$ であるとき，a，b の値を求めよ。

12．［立教大］
3 次方程式 $(x-1)(x^2+ax+a+2)=0$ が 2 重解をもつとき，a の値をすべて求めると，$\boxed{\quad}$ である。

13．［名城大］
1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，$\omega^4+\omega^3+3\omega^2+2\omega+1={}^{\text{ア}}\boxed{\quad}$ であり，$\omega^{99}+\omega^{98}+\cdots\cdots+\omega^2+\omega+1={}^{\text{イ}}\boxed{\quad}$ である。

14．［(1) 神奈川大　(2) 立命館大　(3) 流通科学大］
次の空欄を埋めよ。

(1)　実数 a，b が $a>0$，$b>0$，$ab=6$ を満たすとき，$3a+8b$ の最小値は $\boxed{\quad}$ である。

(2)　$x>0$，$y>0$，$x^2+y^2=1$ とする。xy の値は，$x={}^{\text{ア}}\boxed{\quad}$，$y={}^{\text{イ}}\boxed{\quad}$ のとき，最大値 $^{\text{ウ}}\boxed{\quad}$ をとる。

(3)　x を正の数とする。式 $\dfrac{x^2+2x+16}{x+2}$ の値は $x={}^{\text{ア}}\boxed{\quad}$ のとき最小となり，最小値は $^{\text{イ}}\boxed{\quad}$ である。

15．［立命館大］
2 次方程式 $2x^2-4x+1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$，$\beta-\dfrac{1}{\beta}$ を解にもつ 2 次方程式は $2x^2+{}^{\text{ア}}\boxed{\quad}x+{}^{\text{イ}}\boxed{\quad}=0$ である。

さらに，3 次方程式 $2x^3+ax+b=0$（a，b は定数）もまた $\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$，$\beta-\dfrac{1}{\beta}$ を解にもつとすると，$a={}^{\text{ウ}}\boxed{\quad}$，$b={}^{\text{エ}}\boxed{\quad}$ であり，残る 1 つの実数解は $x={}^{\text{オ}}\boxed{\quad}$ である。

16．［神奈川大］
a を正の定数とする。2 つの方程式 $x^3+2x+a=0$，$x^2+4x+a=0$ が共通の解をもつとき，定数 a の値は $^{\text{ア}}\boxed{\quad}$ であり，共通解は $^{\text{イ}}\boxed{\quad}$ である。

17．［名城大］
x の 4 次方程式 $x^4+2x^3+ax^2+2x+1=0$　……(*) について，次の問いに答えよ。ただし，a は実数の定数とする。

(1)　$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくとき，(*) を t の方程式として表せ。

(2)　$a=3$ のとき，(*) の解を求めよ。

(3)　(*) が異なる 4 個の実数解をもつとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

18．［福岡教育大］
a，b，c，x，y，z を実数とする。

(1)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$ が成り立つことを示せ。

(2)　$x+y+z=1$ のとき，$x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ。