数列

1　● 数列とは

◎ 数列

正の奇数を小さいものから順に並べると

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots ①$$

という数の列が得られる。また，36 の正の約数を小さいものから順に並べると，次のような数の列が得られる。

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36 \qquad \cdots\cdots ②$$

このように数を一列に並べたものを **数列** といい，数列を作っている各数を数列の **項** という。数列の項は，最初の項から順に第 1 項，第 2 項，第 3 項，…… といい，n 番目の項を **第 n 項** という。特に，第 1 項を **初項** ともいう。数列 ① の初項は 1，第 2 項は 3 である。

数列 ② のように，項の個数が有限である数列を **有限数列** といい，有限数列においては，項の個数を **項数**，最後の項を **末項** という。例えば，有限数列 ② の項数は 9，末項は 36 である。

数列を一般的に表すには，次のように書く。

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

また，この数列を，$\{a_n\}$ と略記することがある。

例えば，数列 ① を $\{a_n\}$ とすると，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=5$，…… であり，一般に，第 n 項 a_n は次のように表すことができる。

$$a_n=2n-1$$

この例のように，数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n が n の式で表されるとき，これを数列 $\{a_n\}$ の **一般項** という。一般項が与えられると，n に 1，2，3，…… を代入することにより，その数列の各項を求めることができる。

また，数列 ① は，その一般項を用いて，$\{2n-1\}$ と表すこともある。

例 1　一般項が $a_n=4n-3$ である数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 5 項までを求めると，次のようになる。

$a_1=4\cdot1-3=1$，　$a_2=4\cdot2-3=5$，　$a_3=4\cdot3-3=9$

$a_4=4\cdot4-3=13$，　$a_5=4\cdot5-3=17$

例 2　(1)　数列　1，4，9，16，25，……

では，初項が 1^2，第 2 項が 2^2，第 3 項が 3^2，…… のように，第 n 項が n^2 になっていると推測できる。

よって，一般項は　n^2

(2)　数列　$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{4}$，$\dfrac{3}{8}$，$\dfrac{4}{16}$，$\dfrac{5}{32}$，……

では，第 n 項の分子は n，分母は 2 の累乗 2^1，2^2，2^3，2^4，2^5，……，すなわち 2^n になっていると推測できる。

よって，一般項は　$\dfrac{n}{2^n}$

2　● 等差数列の一般項

◎ 等差数列

数列　　5，8，11，14，17，……

は，初項 5 に次々に 3 を加えて得られる。すなわち，1 つの項とそのすぐ前の項との差は常に 3 で，一定である。

一般に，数列　a_1，a_2，a_3，……，a_n，……

において，各項に一定の数 d を加えると，次の項が得られるとき，この数列を **等差数列** といい，d をその **公差** という。

初項が a，公差が d である等差数列 $\{a_n\}$ の各項は，順に

$a_1=a$

$a_2=a_1+d=a+d$

$a_3=a_2+d=a+2d$

$a_4=a_3+d=a+3d$

………

$$\underbrace{a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4 \ \cdots\cdots\ a_{n-1} \xrightarrow{+d} a_n}_{(n-1)\ 個}$$

と表されるから，一般に次のことが成り立つ。

> **等差数列の一般項**
> 初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は
> $$a_n=a+(n-1)d$$

例 3　初項 3，公差 5 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=3+(n-1)\cdot5$　　すなわち　　$a_n=5n-2$

例えば，第 20 項は　　$a_{20}=5\cdot20-2=98$　　終

例題 1　第 5 項が -5，第 10 項が 15 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の一般項を求めよ。

> **解**　この数列の初項を a，公差を d とすると　　$a_n=a+(n-1)d$
> 第 5 項が -5 であるから　　$a+4d=-5$　……①
> 第 10 項が 15 であるから　　$a+9d=15$　……②
> ①，② を解いて　　$a=-21$，$d=4$
> よって，一般項は　　$a_n=-21+(n-1)\cdot4=4n-25$

3　等差数列の和

初項 1，公差 2，項数 10 の等差数列の和 S を求めてみよう。

$$\begin{array}{rrl} & S= & 1+3+5+\cdots\cdots+15+17+19 \\ +) & S= & 19+17+15+\cdots\cdots+5+3+1 \\ \hline & 2S= & \underbrace{20+20+20+\cdots\cdots+20+20+20}_{10\ 個} \end{array}$$

よって　　$S=\dfrac{1}{2}(20\times10)=100$

一般に，初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の末項を l とし，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-d)+l \quad \cdots\cdots ①$$

また，この数列の項を逆の順に並べると

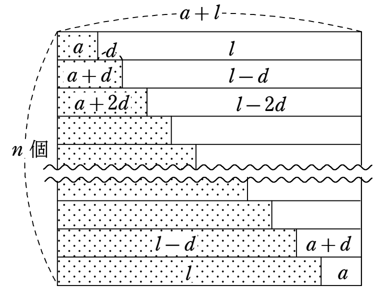
$$S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+d)+a \quad \cdots\cdots ②$$

上の S の場合と同様に，① と ② の各辺を加えると

$$2S_n=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l)$$

右辺は，$a+l$ を n 個加えたものであるから

$$2S_n=n(a+l)$$



よって

$$S_n=\frac{1}{2}n(a+l) \quad \cdots\cdots ③$$

また，l は第 n 項であるから

$$l=a+(n-1)d$$

これを ③ に代入して

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

したがって，次の公式が成り立つ。

> **等差数列の和**
> 初項 a，公差 d，末項 l，項数 n の等差数列の和を S_n とすると
> $$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

例 4　(1)　初項 3，末項 27，項数 13 の等差数列の和は

$$\frac{1}{2}\cdot13(3+27)=195$$

(2)　初項 50，公差 -4，項数 20 の等差数列の和は

$$\frac{1}{2}\cdot20\{2\cdot50+(20-1)\cdot(-4)\}=240$$

終

例題 3　次の等差数列の和 S を求めよ。

100，105，110，……，200

> **解**　この等差数列の初項は 100，公差は 5 であるから，末項 200 が第 n 項であるとすると
> $100+(n-1)\cdot5=200$
> すなわち　　$5n+95=200$
> ゆえに　　$n=21$
> よって，初項 100，末項 200，項数 21 の等差数列の和を求めて
> $$S=\frac{1}{2}\cdot21(100+200)=3150$$

4 ● 等比数列の一般項

◎ 等比数列

数列　　　3，6，12，24，48，96，……

は，初項 3 に次々に 2 を掛けて得られる。すなわち，隣り合う 2 つの項の比は常に一定である。

一般に，数列　a_1，a_2，a_3，……，a_n，……

において，各項に一定の数 r を掛けると，次の項が得られるとき，この数列を **等比数列** といい，r をその **公 比** という。

初項が a，公比が r である等比数列 $\{a_n\}$ の各項は，順に

$$a_1=a$$
$$a_2=a_1r=ar$$
$$a_3=a_2r=ar^2$$
$$a_4=a_3r=ar^3$$

………

$$\underbrace{a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3 \xrightarrow{\times r} a_4 \quad \cdots\cdots \quad a_{n-1} \xrightarrow{\times r} a_n}_{(n-1)\text{ 個}}$$

と表されるから，一般に次のことが成り立つ。

> **等比数列の一般項**
> 初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は
> $$a_n=ar^{n-1}$$

例 5　初項 2，公比 3 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=2\cdot3^{n-1}$$

例えば，第 8 項は　$a_8=2\cdot3^7=4374$　終

例題 5　第 4 項が -24，第 6 項が -96 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

> **解**　この数列の初項を a，公比を r とすると　$a_n=ar^{n-1}$
> 第 4 項が -24 であるから　$ar^3=-24$　……①
> 第 6 項が -96 であるから　$ar^5=-96$　……②
> ①，② から　$-24r^2=-96$　$\boxed{\text{② から } ar^3\cdot r^2=-96}$
> よって　$r^2=4$
> ゆえに　$r=\pm2$
> ① から　$r=2$ のとき $a=-3$，$r=-2$ のとき $a=3$
> よって，一般項は　$a_n=-3\cdot2^{n-1}$　または　$a_n=3(-2)^{n-1}$

5 ● 等比数列の和

初項 2，公比 3，項数 6 の等比数列の和 S を求めてみよう。

$$S=2+\boxed{2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+2\cdot3^4+2\cdot3^5}\quad\cdots\cdots①$$

この両辺に公比 3 を掛けると

$$3S=\boxed{2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+2\cdot3^4+2\cdot3^5}+2\cdot3^6\quad\cdots\cdots②$$

①−② から　$S-3S=2-2\cdot3^6$

よって　$S=\dfrac{2(1-3^6)}{1-3}=728$

一般に，初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=a+\boxed{ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}}\quad\cdots\cdots③$$

この両辺に公比 r を掛けると

$$rS_n=\boxed{ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}}+ar^n\quad\cdots\cdots④$$

③−④ から　$S_n-rS_n=a-ar^n$

すなわち　$(1-r)S_n=a(1-r^n)$

よって，$r\neq1$ のとき　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

また，$r=1$ のとき　$S_n=\underbrace{a+a+a+\cdots\cdots+a}_{n\text{ 個}}=na$

したがって，次の公式が成り立つ。

> **等比数列の和**
> 初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和を S_n とする。
> 1　$r\neq1$ のとき　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$
> 2　$r=1$ のとき　$S_n=na$

例 6　(1)　初項 1，公比 2，項数 n の等比数列の和 S_n は

$$S_n=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$

(2)　初項 9，公比 -3 の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{9\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=\frac{9}{4}\{1-(-3)^n\}$$　終

例題 6
第 2 項が 3，初項から第 3 項までの和が 13 である等比数列の，初項 a と公比 r を求めよ。

> **解**　与えられた条件から
> $ar=3$　……①
> $a+ar+ar^2=13$　……②
> ② から　$a(1+r+r^2)=13$
> この式の両辺に r を掛けると　$ar(1+r+r^2)=13r$
> ① を代入して整理すると　$3r^2-10r+3=0$
> これを解いて　$r=\dfrac{1}{3}$，3
> ① から　$r=\dfrac{1}{3}$ のとき $a=9$，　$r=3$ のとき $a=1$
> よって　$a=9$，$r=\dfrac{1}{3}$　または　$a=1$，$r=3$

6 ◎和の記号 Σ

数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 n 項までの和を，記号 Σ を用いて

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ と書く。Σ はギリシャ文字で，シグマと読む。

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

また，$\displaystyle\sum_{k=p}^{q}a_k$ と書けば，数列 $\{a_n\}$ の第 p 項から第 q 項までの和を表す。

例 7　(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots\cdots+n$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k-2)=1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=2}^{10}3^k=3^2+3^3+3^4+\cdots\cdots+3^{10}$　終

例 8　$\displaystyle\sum_{k=3}^{6}k^3$，　$\displaystyle\sum_{j=3}^{6}j^3$，　$\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(k+2)^3$は，いずれも和 $3^3+4^3+5^3+6^3$ を表している。　終

数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots=a_n=c$ のときは

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+\cdots\cdots+c}_{n\text{ 個}}=nc$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=nc$　　特に　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1=n$

◎ 累乗の和

自然数の数列の和 $1+2+3+\cdots\cdots+n$ について、初項 1 、公差 1 、項数 n の等差数列 の和と考えると　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$　……①　が成り立つ。

ここでは，次のような 1 から n までの自然数の 2 乗の和を求めてみよう。

$$S=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$$

この和を求めるために，恒等式 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ を利用する。

$k=1$ とすると　$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$
$k=2$ とすると　$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$
$k=3$ とすると　$4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1$
…………　…………………
$k=n$ とすると　$(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$

$$\begin{array}{rl} \cancel{2}^3 & -1^3 \\ \cancel{3}^3 & -\cancel{2}^3 \\ \cancel{4}^3 & -\cancel{3}^3 \\ \cdots\cdots & \\ +)\ (n+1)^3 & -\cancel{n}^3 \\ \hline (n+1)^3 & -1^3 \end{array}$$

これらの n 個の等式を辺々加えると

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots\cdots+n)+n$$

① を代入して　$(n+1)^3-1=3S+\dfrac{3}{2}n(n+1)+n$

ゆえに　$3S=(n+1)^3-1-\dfrac{3}{2}n(n+1)-n=\dfrac{1}{2}(n+1)\{2(n+1)^2-3n-2\}$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

したがって　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

7 ●Σ公式と計算

いくつかの数列の和の公式は，Σを用いて，次のようにまとめられる。

数列の和の公式

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c=nc$　　特に　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1=n$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$，　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$，　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}=\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{r^n-1}{r-1}$　$(r\neq 1)$

◎Σの性質

2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ と定数 p に対して

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots\cdots+(a_n+b_n)$$
$$=(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n)$$
$$pa_1+pa_2+\cdots\cdots+pa_n=p(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$$

である。したがって，Σについて次の等式が成り立つ。

Σの性質

1　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

2　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}pa_k=p\sum_{k=1}^{n}a_k$　　p は k に無関係な定数

一般に，p，q を k に無関係な定数とするとき，次のことが成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k)=p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k$$

Σの性質や数列の和の公式を利用すると，次のような和が求められる。

例 9　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+2)=\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n$$
$$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-9(n+1)+12\}$$
$$=\frac{1}{6}n(2n^2-6n+4)$$
$$=\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$$

終

例題 7　次の和を求めよ。

$$1^2\cdot 2+2^2\cdot 3+3^2\cdot 4+\cdots\cdots+n^2(n+1)$$

解　この和は，第 k 項が $k^2(k+1)$ である数列の，初項から第 n 項までの和であるから

$$\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)=\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)+2(2n+1)\}$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+7n+2)$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)$$

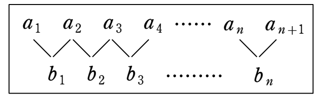
8 ● 階差数列

◎ 階差数列

数列 $\{a_n\}$ の隣り合う2つの項の差

$b_n=a_{n+1}-a_n$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$



を項とする数列 $\{b_n\}$ を，数列 $\{a_n\}$ の **階差数列** という。

例 10　数列　1，4，9，16，25，36，…… の階差数列は

3，5，7，9，11，……

となり，初項3，公差2の等差数列である。　終

階差数列を用いて，もとの数列の一般項を表すことを考えてみよう。

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$a_2-a_1=b_1$

$a_3-a_2=b_2$

$a_4-a_3=b_3$

…………

$a_n-a_{n-1}=b_{n-1}$

$$\begin{array}{rl}
\cancel{a_2}-a_1 & =b_1\\
\cancel{a_3}-\cancel{a_2} & =b_2\\
\cancel{a_4}-\cancel{a_3} & =b_3\\
\cdots\cdots & \\
+)\ a_n-\cancel{a_{n-1}} & =b_{n-1}\\
\hline
a_n-a_1 & =b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{n-1}
\end{array}$$

これらの $(n-1)$ 個の等式を辺々加えると，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n-a_1=b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{n-1}$$

よって　$\displaystyle a_n=a_1+(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{n-1})=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

したがって，数列 $\{a_n\}$ とその階差数列 $\{b_n\}$ について，次のことが成り立つ。

階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$n\geqq 2$ のとき　　$\displaystyle a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

階差数列を利用して，与えられた数列の一般項を求めてみよう。

例題 8　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1，4，11，22，37，56，……

解　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

3，7，11，15，19，……

となり，これは初項3，公差4の等差数列である。

よって　　$b_n=3+(n-1)\cdot 4=4n-1$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-1)=1+4\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1$$
$$=1+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$$

すなわち　　$a_n=2n^2-3n+2$　……①

初項は $a_1=1$ なので，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　　$a_n=2n^2-3n+2$

9 ●漸化式と数列

◎ 漸化式

数列 $\{a_n\}$ が次の 2 つの条件を満たしているとする。

[1] $a_1=1$　　[2] $a_{n+1}=a_n+n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

[1] をもとにして，[2] において n を 1，2，3，…… とすると

$$a_2=a_1+1=1+1=2$$
$$a_3=a_2+2=2+2=4$$
$$a_4=a_3+3=4+3=7$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

となり，順次 a_2，a_3，a_4，…… の値がただ 1 通りに定まる。したがって，数列 $\{a_n\}$ は上の 2 つの条件 [1]，[2] によって定められる。

上の式 [2] のように，数列において，その前の項から次の項をただ 1 通りに定める規則を示す等式を **漸化式** という。今後，特に断りがない場合は，漸化式は $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ で成り立つものとする。

例題 10　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第 4 項を求めよ。

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=2a_n-1$$

解　$a_2=2a_1-1=2\cdot3-1=5$

$a_3=2a_2-1=2\cdot5-1=9$

よって　$a_4=2a_3-1=2\cdot9-1=17$

10 ●漸化式の基本形

初項と漸化式で定められる数列の一般項を求めることを考えよう。

◎ $a_{n+1}=a_n+d$（等差型），$a_{n+1}=ra_n$（等比型）の漸化式

既に学んだ等差数列と等比数列は，次の条件によって定められる。

初項 a，公差 d の等差数列は　$a_1=a$，$a_{n+1}=a_n+d$

初項 a，公比 r の等比数列は　$a_1=a$，$a_{n+1}=ra_n$

◎ $a_{n+1}=a_n+(n$ の式$)$（階差型）の漸化式

漸化式が $a_{n+1}=a_n+(n$ の式$)$ の形のとき，階差数列を利用する方法で，一般項が求められることがある。

例題 11　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=a_n+2^n$$

解　条件より　$a_{n+1}-a_n=2^n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が 2^n であるから，

$n\geqq2$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2^k=3+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$

よって　$a_n=2^n+1$

初項は $a_1=3$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2^n+1$

◎ $a_{n+1}=pa_n+q$（特性型）の漸化式

p，q は定数で，$p\neq0$，$p\neq1$ とする。数列 $\{a_n\}$ について，漸化式

$$a_{n+1}=pa_n+q\quad\cdots\cdots①$$

と初項 a_1 が与えられたとき，一般項 a_n を求める方法を考えよう。

① に対して，等式

$$c=pc+q\quad\cdots\cdots②$$

を満たす定数 c を考える。①−② から

$$a_{n+1}-c=p(a_n-c)$$

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=pa_n+q \\ -) & \quad\ \ c=pc\ \ +q \\ \hline & a_{n+1}-c=p(a_n-c) \end{array}$$

よって，数列 $\{a_n-c\}$ は初項 a_1-c，公比 p の等比数列であり，このことを利用して，一般項 a_n が求められる。

このとき、②を漸化式 ① の**特性方程式**という。

例えば，漸化式 $a_{n+1}=3a_n+2$ は，$c=3c+2$ を満たす定数 $c=-1$ を用いて，$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$ と変形することができる。このことを利用して，次の問題を考えてみよう。

例題 12　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=3a_n+2$$

解　$a_{n+1}=3a_n+2$ を変形すると　$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$

ここで，$b_n=a_n+1$ とおくと

$b_{n+1}=3b_n$，　$b_1=a_1+1=1+1=2$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 2，公比 3 の等比数列で

$b_n=2\cdot3^{n-1}$

$a_n=b_n-1$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=2\cdot3^{n-1}-1$