# 3 項間漸化式

◎　3 項間漸化式

【$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ の一般項 $a_n$ を求める手順】

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0\cdots(*)$ を $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ に変形すると
等比型の漸化式に帰着できる。

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \iff a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0 \quad\cdots①$

①と$(*)$の左辺を係数比較すると、

$$\begin{cases}-(\alpha+\beta)=p\\ \alpha\beta=q\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha+\beta=-p\\ \alpha\beta=q\end{cases}$$

よって、$\alpha,\beta$ を解にもつ 2 次方程式の 1 つは、$x^2+px+q=0$ である。
$x^2+px+q=0$ は $(*)$ の $a_{n+2}$ を $x^2$ に、$a_{n+1}$ を $x$ に、$a_n$ を $x^0(=1)$ に置き換えたものであり、$x^2+px+q=0$ を $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ の特性方程式という。

1.　$\alpha,\beta$ が異なる 2 解のとき
$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0\cdots(*)$ を
$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と $a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ にそれぞれ
変形し、これらを解くと、$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$ と
$a_{n+1}-\beta a_n=(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}$ となり、差をとれば、一般項 $a_n$ が求まる。

2.　$\alpha,\beta$ が一致(重解)のとき
$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0\cdots(*)$ を $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ に変形し、
これを解くと、$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\alpha^{n-1}$ となり、これは
$a_{n+1}=pa_n+q^n$ 型の漸化式である。

1.　［奈良県立医科大］
次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=3,\ a_2=5,\ a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

2.　［室蘭工業大］
数列 $\{a_n\}$ が次の条件を満たすとする。

$$a_1=1,\ a_2=6,\ a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　$b_n=a_{n+1}-3a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3.　［横浜国立大］
数列 $\{a_n\}$ は $a_1=5$，$a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2=\dfrac{2}{3}a_na_{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たすとする。
(1)　$a_2$，$a_3$ を求めよ。
(2)　$a_{n+2}$ を $a_n$，$a_{n+1}$ を用いて表せ。
(3)　一般項 $a_n$ を求めよ。