数列の復習③　解答

$\boxed{1}$ 次のような等差数列の和 S を求めよ。

(1)　初項 4，末項 28，項数 10　　　　(2)　初項 2，末項 97，項数 20

等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n ($=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$) は
以下のように求められる.

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2} \longleftarrow \frac{(\text{項数})(\text{初項}+\text{末項})}{2}}$$

（日本語で理解しておくと わかりやすい）

【説明】

S_n は初項から第 n 項までの和のこと.

$$S_n=\overbrace{\underset{\text{初項}}{a_1}+a_2+\cdot\cdot\cdot+a_{n-1}+\underset{\text{末項}}{a_n}}^{n\text{ 個(項数)}}$$

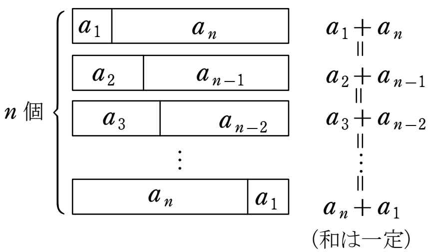
$$+)\ S_n=a_n+a_{n-1}+\cdot\cdot+a_2+a_1 \quad \leftarrow\text{和を逆向きに並べ替えたもの}$$

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdot\cdot+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)$$

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdot\cdot\cdot+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)$$

$$2S_n=n(a_1+a_n)$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$



(例)　$S_n=1+2+3+4+\cdots\cdots+99+100$　を求める

$$S_n=\overbrace{\underset{\text{初項}}{1}+2+3+\cdots\cdots+98+99+\underset{\text{末項}}{100}}^{100\text{ 個(項数)}}$$

$$+)\ S_n=100+99+98+\cdots\cdots+3+2+1 \quad \leftarrow\text{和を逆向きに並べ替えたもの}$$

$$2S_n=(1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots\cdots+(98+3)+(99+2)+(100+1)$$

$$2S_n=101+101+101+\cdots\cdots+101+101$$

$$2S_n=100\times 101$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{100\times 101}{2}=5050 \qquad \boxed{\frac{(\text{項数})(\text{初項}+\text{末項})}{2}}$$

$\boxed{1}$ の答え

(1)　$S=\dfrac{10(4+28)}{2}=160$

(2)　$S=\dfrac{20(2+97)}{2}=990$

$\boxed{2}$ 初項 3，公差 5，項数 15 の等差数列の和 S を求めよ。

この数列の一般項は $a_n=3+(n-1)\times 5=5n-2$

よって 第 15 項は $a_{15}=5\times 15-2=73$ （これが末項）

ゆえに　$S=\dfrac{15(3+73)}{2}=570$

$\boxed{3}$ 初項 10，公差 4 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

この数列の第 n 項は $a_n=10+(n-1)\times 4=4n+6$

ゆえに　$S_n=\dfrac{1}{2}n\{10+(4n+6)\}=\dfrac{1}{2}n(4n+16)=2n(n+4)$

$\boxed{4}$ 次の等差数列の和 S を求めよ。

28，32，36，……，104

この等差数列の初項は 28，公差は 4 である。

項数を n とすると　$28+(n-1)\times 4=104$

これを解くと　$n=20$

よって　$S=\dfrac{20(28+104)}{2}=1320$