5–2の別解

（別解1）複素数の相等を利用

$x^3 + px^2 - 5x + q = 0 \quad \cdots (*)$

$x = 1+2i$ は $(*)$ の解より，

$(1+2i)^3 + p(1+2i)^2 - 5(1+2i) + q = 0$

$1 + 6i - 12 - 8i + p(-3+4i) - 5 - 10i + q = 0$

$-3p + q - 16 + 4(p-3)i = 0$

p, q は実数より，

$$\begin{cases} -3p + q - 16 = 0 \\ p - 3 = 0 \end{cases}$$

これを解くと，$\underline{p = 3,\ q = 25}$

（別解2）解と係数の関係を利用

$x^3 + px^2 - 5x + q = 0 \quad \cdots (*)$

$(*)$ は実数係数の方程式であり，$1+2i$ を解にもつので，$1-2i$ も解にもつ。

$(*)$ の $1 \pm 2i$ 以外のもう1つの解を α とおくと

解と係数の関係から，

$$\begin{cases} \alpha + (1+2i) + (1-2i) = -p \\ \alpha(1+2i) + \alpha(1-2i) + (1+2i)(1-2i) = -5 \\ \alpha(1+2i)(1-2i) = -q \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2 = -p \\ 2\alpha + 5 = -5 \\ 5\alpha = -q \end{cases}$$

これを解くと，$\alpha = -5$，$\underline{p = 3,\ q = 25}$

☆ 3次方程式の解と係数の関係

3次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の3解を α, β, γ とすると，

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a},\quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$