$f(g(x))g'(x)$ の積分　（ $g(x)=t$ とおく置換積分）

置換積分には２種類のものがあります。置換積分をしないと、積分が困難なものと実はしなくても積分できるものがあります。

例えば、$\displaystyle\int (x+2)\sqrt[3]{2x+1}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^3}dx$, $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$ などは置換積分に頼らないと積分が難しいです。（置換積分の代わりに部分積分で積分できるものもある）

しかし、多くの置換積分はわざわざ $g(x)=t$ とおいて、t の関数の積分に変えなくても積分できるものがほとんどです。それは、次の形の積分です。

f , g , g' の積分

$$\int f(g(x))g'(x)dx=F(g(x))+C$$

（f , g , g' 型の積分は(中身を変えずに) f を積分）

$$F(x)\ \overset{\text{微分}}{\underset{\text{積分}}{\rightleftarrows}}\ f(x) \qquad F(g(x))\ \overset{\text{微分}}{\underset{\text{積分}}{\rightleftarrows}}\ f(g(x))g'(x)$$

高校数学では積分は微分の逆演算であると習います。
$F(g(x))$を微分すると、合成関数の微分によって、$f(g(x))g'(x)$ となるので、逆に $f(g(x))g'(x)$ は積分すると$F(g(x))$になります。

f , g , g' 型の積分は、積分される関数を見て、f , g , g' がそれぞれどんな関数かが判断できる必要があります。慣れるのに少し訓練が必要ですが、練習すればすぐに見分けれるようになります。次の問題で練習しましょう。

練習　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int 2xe^{x^2}dx$　(2) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+4}\,dx$　(3) $\displaystyle\int \sin x\cos^2 x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$　(5) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$　(6) $\displaystyle\int \sin^5 x\,dx$

解答

(1) $\displaystyle\int 2xe^{x^2}dx=e^{x^2}+C$　←(中身を変えずに) f を積分

（$f: e^x$, $g: x^2$, $g': 2x$）

(2) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+4}\,dx=\frac{1}{2}\int 2x\sqrt{x^2+4}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+4)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}(x^2+4)\sqrt{x^2+4}+C$

（$f: \sqrt{x}$, $g: x^2+4$, $g': 2x$）

(3) $\displaystyle\int \sin x\cos^2 x\,dx=-\int(\cos x)^2\cdot(-\sin x)dx=-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$

（$f: x^2$, $g: \cos x$, $g': -\sin x$）　←いつも t とおいているものが g です

(4) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx=\frac{1}{2}(\log x)^2+C$

（$f: x^1$, $g: \log x$, $g': \dfrac{1}{x}$）

(5) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{1}{2}\int 2x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\cdot 2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{x^2-1}+C$

（$f: x^{-\frac{1}{2}}$, $g: x^2-1$, $g': 2x$）

(6) $\displaystyle\int \sin^5 x\,dx=\int(1-\cos^2 x)^2\sin x\,dx$

$\displaystyle\quad=-\int(\cos^4 x-2\cos^2 x+1)\cdot(-\sin x)dx$

$\displaystyle\quad=-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

（$f: x^4$ と x^2 , $g: \cos x$, $g': -\sin x$）