1／6 公式の導出

☆ $\frac{1}{6}$公式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$\downarrow \times a$

$$\left(\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\right)$$

(証明のポイント)

$\int (x+◎)^n dx = \frac{1}{n+1}(x+◎)^{n+1} + C$ が使える形に式変形をする。

(証明) $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$(x-\alpha)$を無理やり作って、帳じり合わせをする

$$= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)+(\underbrace{\alpha-\beta}_{=0})\}\,dx$$

$$= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)^1\}\,dx$$

$(\alpha-\beta) = -(\beta-\alpha)$

$$= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta$$

$$= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

$$= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

よって、$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ //

ちなみに、$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ の両辺に a をかけると、

$\int_\alpha^\beta \boxed{a}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{\boxed{a}}{6}(\beta-\alpha)^3$ が得られる。

☆ $\frac{1}{6}$公式を使うときは、2乗の係数に注意する。