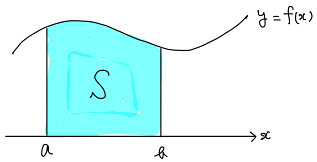
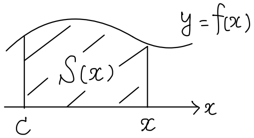
積分と面積

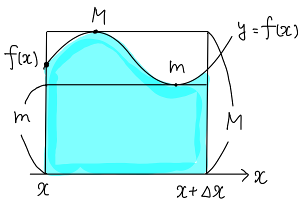


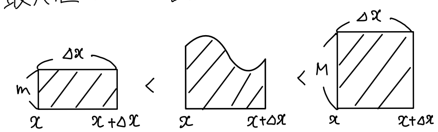
$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

(説明) $f(x) \geqq 0$ とする。



$c \leqq x$ とし、左図のように、$S(x)$ を定める。
$f(x)$ の $[x, x+\Delta x]$ (x 以上、$x+\Delta x$ 以下) における最大値を M、最小値を m とする。





より、

$$m\cdot\Delta x < S(x+\Delta x)-S(x) < M\cdot\Delta x$$

$$\therefore\ m < \frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x} < M$$

$\lim_{\Delta x\to 0} m = f(x)$, $\lim_{\Delta x\to 0} M = f(x)$ より、はさみうちの原理から、$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x} = f(x)$

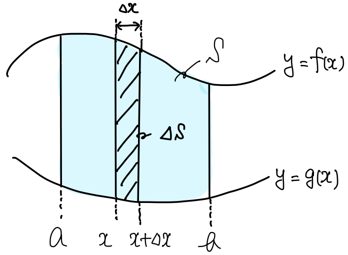
$\therefore\ S'(x) = f(x)$　（導関数の定義：$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を利用）

よって、$c<a<b$ のとき、

$$S = S(b)-S(a) = \left[S(x)\right]_a^b = \int_a^b S'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

◎ 定積分と面積

面積を求めるシステム：微小面積（長方形）の足し合わせ
針のような細さ（イメージ）



Δx が十分小さいとき、ΔS は
縦の長さ $f(x)-g(x)$、横の長さ Δx の長方形の面積に近似できる。

$$\Delta S \fallingdotseq (f(x)-g(x))\Delta x$$

$$\therefore\ \frac{\Delta S}{\Delta x} \fallingdotseq f(x)-g(x)$$

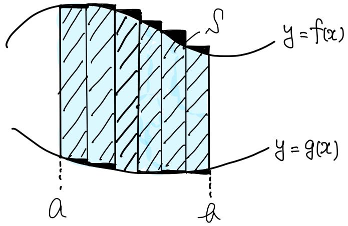
$\Delta x \to 0$ のとき、$\frac{dS}{dx} = f(x)-g(x)$　（$\frac{\Delta S}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x\to 0} \frac{dS}{dx}$ と定めた）

$$\therefore\ \underbrace{dS = (f(x)-g(x))\,dx}_{\text{微小長方形の面積}} \quad \cdots ①$$

① の両辺を a から b まで積分すると、

$$\underbrace{S}_{\text{aからbまで足し合わせる}} = \int_a^b \underbrace{(f(x)-g(x))\,dx}_{\text{微小面積（長方形）}}$$

$\left(S \underset{x\text{で積分}}{\overset{x\text{で微分}}{\rightleftarrows}} \frac{dS}{dx} = f(x)-g(x) \right)$ （$\frac{d}{dx}$：x で微分する）



左図では、長方形がたった6個だが、
実際は、無限個の長方形（$\Delta x \xrightarrow{\Delta x\to 0} dx$：横幅が限りなく0）の面積の総和なので、「◥」or「◢」のようなはみ出た部分や足りない部分は存在しない