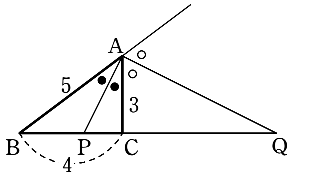
平面図形　演習プリント　解答１

１．［金沢工業大］

AP は $\angle A$ の二等分線であるから

$AB:AC=BP:PC$

すなわち　$5:3=BP:(4-BP)$



よって　$5(4-BP)=3BP$　　ゆえに　$BP=\frac{5}{2}$

また　$PC=4-BP=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$

AQ は頂点 A における外角の二等分線であるから

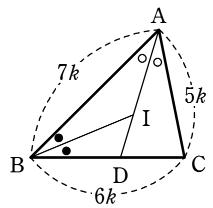
$AB:AC=BQ:CQ$　　すなわち　$5:3=(4+CQ):CQ$

よって　$5CQ=3(4+CQ)$　　ゆえに　$CQ=6$

２．［明治大］

$AB=7k$，$BC=6k$，$CA=5k$ $(k>0)$ とおく。

I は $\triangle ABC$ の内心であるから，AD，BI はそれぞれ $\angle BAC$，$\angle ABC$ の二等分線である。



よって　$BD:DC=AB:AC=7k:5k=7:5$

ゆえに　$\triangle CAD=\frac{5}{7+5}\triangle ABC=\frac{5}{12}\cdot 72={}^{ア}30$

また　$BD=\frac{7}{7+5}BC=\frac{7}{12}\cdot 6k=\frac{7}{2}k$

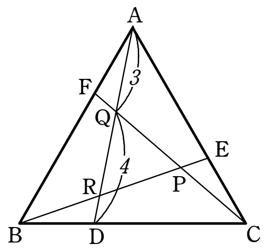
よって　$AI:ID=BA:BD=7k:\frac{7}{2}k=2:1$

ゆえに　$\triangle IAB=\frac{2}{2+1}\triangle ABD=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{7+5}\triangle ABC=\frac{7}{18}\cdot 72={}^{イ}28$

３．［千葉大］

$\triangle ABD$ と直線 CF について，メネラウスの定理により

$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DQ}{QA}=1$



よって　$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{DQ}{QA}=1$

ゆえに　$DQ:QA=4:3$　……①

$\triangle ADC$ と直線 BE について，メネラウスの定理により

$\frac{AR}{RD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$

よって　$\frac{AR}{RD}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=1$　　ゆえに　$AR:RD=6:1$　……②

①，②から　$AQ:QR:RD=3:3:1$

同様にして　$CP:PQ:QF=3:3:1$

よって　$\triangle PQR=\frac{1}{2}\triangle CQR=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\triangle CAD=\frac{3}{14}\cdot\frac{2}{3}\triangle ABC=\frac{1}{7}\triangle ABC$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ であるから　$\triangle PQR=\frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{28}$

別解　（① を導くまでは同じ）

① から　$\triangle AQC=\frac{3}{7}\triangle ADC=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}\triangle ABC=\frac{2}{7}\triangle ABC$

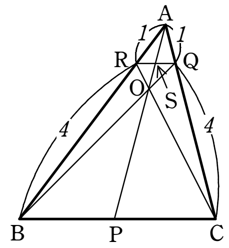
同様にして　$\triangle BRA=\frac{2}{7}\triangle ABC$，$\triangle CPB=\frac{2}{7}\triangle ABC$

よって　$\triangle PQR=\triangle ABC-3\cdot\frac{2}{7}\triangle ABC=\frac{1}{7}\triangle ABC$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ であるから　$\triangle PQR=\frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{28}$

４．［札幌学院大］

(1)　チェバの定理により　$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$



すなわち　$\frac{1}{4}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{4}{1}=1$　　よって　$\frac{BP}{PC}=1$

ゆえに　$BP:PC=1:1$

$AR:RB=AQ:QC$ であるから　$RQ /\!/ BC$

よって　$RS:SQ=BP:PC=1:1$

したがって　$\triangle ARS:\triangle AQS=RS:SQ=1:1$

(2)　$\triangle ARQ$ と $\triangle ABC$ において　$AR:AB=AQ:AC=1:5$

$\angle RAQ=\angle BAC$（共通）

２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから　$\triangle ARQ\backsim\triangle ABC$

よって　$\triangle ARQ:\triangle ABC=1^2:5^2=1:25$

(3)　$\triangle ABP$ と直線 RC についてメネラウスの定理により　$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PO}{OA}=1$

すなわち　$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{PO}{OA}=1$　　よって　$\frac{PO}{OA}=2$

ゆえに　$PO:OA=2:1$

したがって　$\triangle OBC:\triangle ABC=PO:PA=2:3$

(4)　(2) より　$\triangle ARQ=\frac{1}{25}\triangle ABC$　……①

$RQ /\!/ BC$ であるから，$\triangle OQR$ と $\triangle OBC$ において

$\angle OQR=\angle OBC$（錯角）

$\angle ORQ=\angle OCB$（錯角）

２組の角がそれぞれ等しいから　$\triangle OQR\backsim\triangle OBC$

また　$QR:BC=AR:AB=1:5$

よって　$\triangle OQR:\triangle OBC=1^2:5^2=1:25$

更に，(3) より $\triangle OBC:\triangle ABC=2:3$ であるから

$\triangle OQR=\frac{1}{25}\triangle OBC=\frac{1}{25}\cdot\frac{2}{3}\triangle ABC=\frac{2}{75}\triangle ABC$　……②

①，② から　$\triangle ARQ:\triangle OQR=\frac{1}{25}:\frac{2}{75}=3:2$

５．［東洋大］

(1)　$\triangle ABC$ と $\triangle AED$ において，

$\angle A$ は共通

四角形 BCED が円に内接するから　$\angle ABC=\angle AED$

よって　$\triangle ABC\backsim\triangle AED$　……①

ゆえに　$AB:AC=AE:AD=1:2$

(2)　$AD=a$，$DB=b$ とすると　$AB=a+b$

$AD:AE=2:1$ から　$AE=\frac{a}{2}$　　$BD:CE=1:3$ から　$CE=3b$

よって　$AC=AE+CE=\frac{a}{2}+3b$

(1) より $2AB=AC$ であるから　$2(a+b)=\frac{a}{2}+3b$　　ゆえに　$b=\frac{3}{2}a$

したがって　$AD:DB=a:b=1:\frac{3}{2}=2:3$

(3)　$\triangle FCE$ と $\triangle FDB$ において，

$\angle F$ は共通

四角形 BCED が円に内接するから　$\angle FCE=\angle FDB$

よって　$\triangle FCE\backsim\triangle FDB$　……②

$ED=x$，$DF=y$ とすると　$FE=x+y$

② より $FE:FB=CE:DB=3:1$ であるから　$FB=\frac{1}{3}(x+y)$

また，① より　$BC:ED=AB:AE=(a+b):\frac{a}{2}=\frac{5}{2}a:\frac{a}{2}=5:1$

よって　$BC=5x$

ゆえに　$FC=FB+BC=\frac{1}{3}(x+y)+5x=\frac{1}{3}(16x+y)$

再び ② より $FC:FD=CE:DB=3:1$ であるから　$FC=3FD$

すなわち　$\frac{1}{3}(16x+y)=3y$　　よって　$y=2x$

したがって　$ED:DF=x:y=1:2$

別解　$AE:AC=\frac{a}{2}:\left(\frac{a}{2}+3b\right)=\frac{a}{2}:5a=1:10$

よって　$AE:EC=1:9$

$\triangle ADE$ と直線 FC において，メネラウスの定理により

$\frac{DF}{FE}\cdot\frac{EC}{CA}\cdot\frac{AB}{BD}=1$　すなわち　$\frac{DF}{FE}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{3}=1$

ゆえに，$\frac{DF}{FE}=\frac{2}{3}$ であるから　$ED:DF=1:2$

平面図形　演習プリント　解答 2

6．［名古屋工業大］

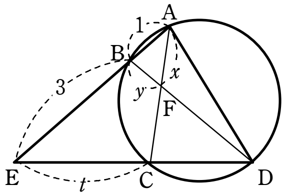
(1)　△ABF と △DCF において，円周角の定理により

$\angle \mathrm{BAF}=\angle \mathrm{CDF}$，$\angle \mathrm{ABF}=\angle \mathrm{DCF}$

よって　△ABF∽△DCF

その面積比が △ABF：△DCF$=1:4=1^2:2^2$ であるから，相似比は　$1:2$

よって　$\mathrm{FC}=2\mathrm{FB}=2y$，$\mathrm{FD}=2\mathrm{FA}=2x$



(2)　(1) から　$\mathrm{CD}=2\mathrm{BA}=2$

よって，方べきの定理により　$\mathrm{EB}\cdot\mathrm{EA}=\mathrm{EC}\cdot\mathrm{ED}$

すなわち　$3\cdot4=t(t+2)$

よって　$t^2+2t-12=0$

ゆえに　$t=-1\pm\sqrt{13}$

$t>0$ であるから　$t=-1+\sqrt{13}$

(3)　△AEC と直線 BD について，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BE}}=1$$

すなわち　$\dfrac{t+2}{2}\cdot\dfrac{2y}{x}\cdot\dfrac{1}{3}=1$

よって　$u=\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{t+2}$

$$=\frac{3}{\sqrt{13}+1}=\frac{\sqrt{13}-1}{4}$$

(4)　$\dfrac{\triangle\mathrm{AED}}{\triangle\mathrm{ABF}}=\dfrac{\triangle\mathrm{ABD}}{\triangle\mathrm{ABF}}\cdot\dfrac{\triangle\mathrm{AED}}{\triangle\mathrm{ABD}}=\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BF}}\cdot\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}}$

$$=\frac{2x+y}{y}\cdot\frac{4}{1}=4\left(2\cdot\frac{x}{y}+1\right)$$

$$=4\left(\frac{2}{u}+1\right)=4\left(2\cdot\frac{\sqrt{13}+1}{3}+1\right)$$

$$=\frac{20+8\sqrt{13}}{3}$$

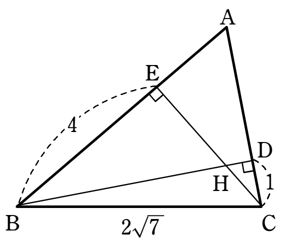
7．［同志社女子大］

(1)　$\mathrm{BD}=\sqrt{\mathrm{BC}^2-\mathrm{CD}^2}=\sqrt{(2\sqrt{7})^2-1^2}$

$=\sqrt{27}={}^{\text{ア}}3\sqrt{3}$

$\mathrm{CE}=\sqrt{\mathrm{BC}^2-\mathrm{BE}^2}=\sqrt{(2\sqrt{7})^2-4^2}$

$=\sqrt{12}={}^{\text{イ}}2\sqrt{3}$



(2)　(前半)　△BHE と △CHD において，

$\angle \mathrm{BEH}=\angle \mathrm{CDH}=90^\circ$，

$\angle \mathrm{BHE}=\angle \mathrm{CHD}$　(対頂角)

であるから，△BHE∽△CHD であり，その相似比は　$\mathrm{BE}:\mathrm{CD}=4:1$

よって，$\mathrm{CH}=x$，$\mathrm{DH}=y$ とすると

$\mathrm{BH}=4\mathrm{CH}=4x$，　$\mathrm{EH}=4\mathrm{DH}=4y$

ゆえに，$\mathrm{BD}=4x+y$，$\mathrm{CE}=x+4y$ となるから，(1) の結果より

$4x+y=3\sqrt{3}$，$x+4y=2\sqrt{3}$

これを解いて　$\mathrm{CH}=x={}^{\text{ウ}}\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$\mathrm{DH}=y={}^{\text{エ}}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(後半)　次に，$\mathrm{AD}=a$，$\mathrm{AE}=b$ とすると

$\mathrm{AB}=b+4$，$\mathrm{AC}=a+1$

直角三角形 ABD において，$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2$ であるから

$(b+4)^2=a^2+(3\sqrt{3})^2$

よって　$a^2-b^2-8b+11=0$　……①

直角三角形 ACE において，$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AE}^2+\mathrm{CE}^2$ であるから

$(a+1)^2=b^2+(2\sqrt{3})^2$

よって　$a^2-b^2+2a-11=0$　……②

②－① から　$2a+8b-22=0$　　ゆえに　$a=11-4b$　……③

これを ① に代入して整理すると　$5b^2-32b+44=0$

これを解くと　$b=2,\ \dfrac{22}{5}$

③ から　$b=2$ のとき $a=3$，　$b=\dfrac{22}{5}$ のとき $a=-\dfrac{33}{5}$　(不適)

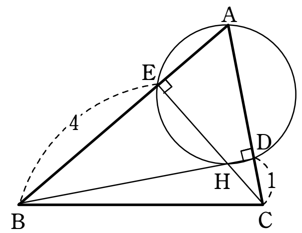
よって，$a=3$，$b=2$ であるから　$\mathrm{AB}=2+4={}^{\text{オ}}6$，$\mathrm{AC}=3+1={}^{\text{カ}}4$

(後半の別解)　$\mathrm{BH}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

$\angle \mathrm{AEH}=\angle \mathrm{ADH}=90^\circ$ であるから，4 点 A，E，H，D は同じ円周上にある。

よって，方べきの定理から

$\mathrm{BE}\times\mathrm{BA}=\mathrm{BH}\times\mathrm{BD}$



すなわち　$4\times\mathrm{AB}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\times3\sqrt{3}$

したがって　$\mathrm{AB}={}^{\text{オ}}6$

方べきの定理から　$\mathrm{CD}\times\mathrm{CA}=\mathrm{CH}\times\mathrm{CE}$

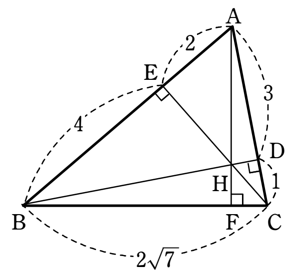
すなわち　$1\times\mathrm{AC}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times2\sqrt{3}$　　　したがって　$\mathrm{AC}={}^{\text{カ}}4$

(3)　△ABC において，チェバの定理により

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DA}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}=1$$

すなわち　$\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{4}=1$

よって，$\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}=6$ となるから　$\mathrm{BF}:\mathrm{FC}={}^{\text{キ}}6:{}^{\text{ク}}1$



ゆえに　$\mathrm{CF}=\dfrac{1}{7}\mathrm{BC}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

H は △ABC の垂心であるから，$\angle \mathrm{AFC}=90^\circ$ であり

$$\mathrm{AF}=\sqrt{\mathrm{AC}^2-\mathrm{CF}^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2}=\sqrt{\frac{108}{7}}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}}={}^{\text{ケ}}\frac{6\sqrt{21}}{7}$$

8．［中京大］

$\mathrm{BD}=x$ とする。

△ACD において

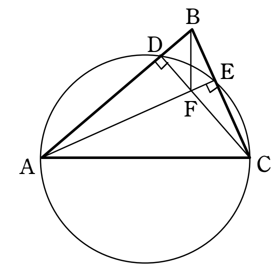
$\mathrm{CD}^2=\mathrm{AC}^2-\mathrm{AD}^2=(3\sqrt{6})^2-(7-x)^2$

$=5+14x-x^2$

△BCD において

$\mathrm{CD}^2=\mathrm{BC}^2-\mathrm{BD}^2=5^2-x^2$

$=25-x^2$



よって　$5+14x-x^2=25-x^2$

ゆえに　$x=\dfrac{10}{7}$　　すなわち　$\mathrm{BD}=\dfrac{10}{7}$

方べきの定理から　$\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BA}=\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BC}$

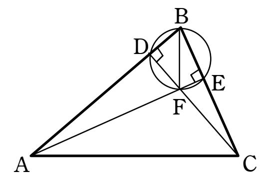
よって　$\mathrm{BE}=\dfrac{\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}}=\dfrac{\frac{10}{7}\cdot7}{5}=2$

ゆえに　$\mathrm{AE}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BE}^2}=\sqrt{7^2-2^2}=3\sqrt{5}$

また，$\angle \mathrm{BDF}=\angle \mathrm{BEF}=90^\circ$ であるから，4 点 B，D，E，F は同一円周上にある。

この円について，方べきの定理から

$\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AE}=\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AB}$



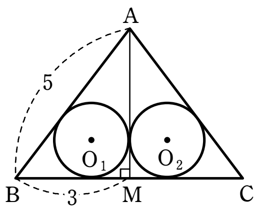
よって　$\mathrm{AF}=\dfrac{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AB}}{\mathrm{AE}}=\dfrac{\left(7-\frac{10}{7}\right)\cdot7}{3\sqrt{5}}=\dfrac{13\sqrt{5}}{5}$

ゆえに　$\mathrm{FE}=\mathrm{AE}-\mathrm{AF}=3\sqrt{5}-\dfrac{13\sqrt{5}}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

したがって　$\mathrm{BF}=\sqrt{\mathrm{BE}^2+\mathrm{FE}^2}=\sqrt{4+\dfrac{4}{5}}=\sqrt{\dfrac{24}{5}}=\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$

9．［香川大］

(1)　$BM=\frac{1}{2}BC=3$



△ABC は AB＝AC の二等辺三角形であるから，点 A から辺 BC に下ろした垂線は，BC を 2 等分する。

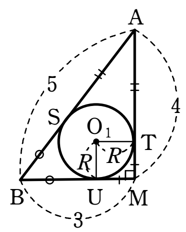
よって　　$AM\perp BC$

ゆえに，△ABM において，三平方の定理により

$$AM^2=AB^2-BM^2=5^2-3^2=16$$

$AM>0$ であるから　　$AM=4$

(2)　図形の対称性から，円 O_1 は △ABM に内接する。



円 O_1 と辺 AB，AM，BM の接点をそれぞれ S，T，U とすると

$AS=AT=AM-TM=4-R$

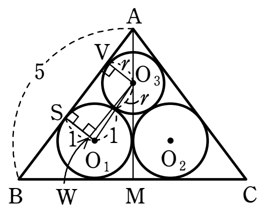
$SB=BU=BM-UM=3-R$　……①

$AB=AS+SB$ であるから

$5=(4-R)+(3-R)$　　　すなわち　　$2R=2$

したがって　　$R=1$

(3)　① より　　$SB=3-1=2$　……②



また，円 O_3 と辺 AB の接点を V，中心 O_3 から O_1S に垂線 O_3W を下ろすと　　$VS=O_3W$

よって，$\triangle O_1O_3W$ において三平方の定理により

$$VS^2=O_3W^2=O_1O_3{}^2-O_1W^2$$

$$=(1+r)^2-(1-r)^2=4r$$

$VS>0$ であるから　　$VS=2\sqrt{r}$　……③

更に，$\triangle AO_3V$ と △ABM において

$\angle AVO_3=\angle AMB=90°$，$\angle O_3AV=\angle BAM$ (共通)

2 組の角がそれぞれ等しいから　　$\triangle AO_3V\backsim\triangle ABM$

よって　　　$AV:AM=O_3V:BM=r:3$

したがって　　$AV=\frac{r}{3}AM=\frac{r}{3}\cdot 4=\frac{4}{3}r$　……④

$AB=AV+VS+SB$ であるから，② ～ ④ より

$5=\frac{4}{3}r+2\sqrt{r}+2$　　　すなわち　　$4r+6\sqrt{r}-9=0$

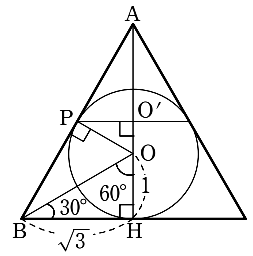
$t=\sqrt{r}$ とおくと，$t>0$ であり　　$4t^2+6t-9=0$

これを解くと　　$t=\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{4}$　　　$t>0$ より　　$t=\frac{-3+3\sqrt{5}}{4}$

したがって　　$r=t^2=\frac{(-3+3\sqrt{5})^2}{4^2}=\frac{27-9\sqrt{5}}{8}$

10．［神戸学院大］

(1)　球の中心を O とし，直線 AO と底面の円との交点を H とする。



BP，BH は点 B から，中心を O とする半径 1 の円に引いた接線であるから　　$BP=BH=\sqrt{3}$

(2)　$\frac{BH}{OH}=\sqrt{3}$ であるから　$\angle BOH=60°$

また　　$\angle BOP=\angle BOH=60°$

よって　　$\angle AOP=180°-(60°\times2)=60°$

ゆえに，円 C の中心を O′ とすると

$$O'P=OP\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3)　$\angle OBH=30°$ より　　$\angle ABH=60°$

よって，△ABH について　　$\frac{AH}{BH}=\tan60°$

ゆえに　　$AH=BH\tan60°=3$

(4)　△ABH について　　$\frac{BH}{AB}=\cos60°$

ゆえに　　$AB=\frac{BH}{\cos60°}=2\sqrt{3}$

(5)　$2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\pi\times\frac{2\pi\cdot\sqrt{3}}{2\pi\cdot2\sqrt{3}}=6\pi$

別解　半径が $2\sqrt{3}$，弧の長さが $2\pi\cdot\sqrt{3}$ の扇形の面積を求めて

$$\frac{1}{2}\times2\pi\cdot\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=6\pi$$

(6)　$PO':BH=\frac{\sqrt{3}}{2}:\sqrt{3}=1:2$

よって，円 C より上の部分の直円錐の体積を V_1，もとの直円錐の体積を V_2 とすると

$$V_1:V_2=1^3:2^3=1:8$$

ここで　　$V_2=\frac{1}{3}\cdot\pi(\sqrt{3})^2\cdot3=3\pi$

ゆえに，求める円錐台の体積は　　$3\pi\times\frac{8-1}{8}=\frac{21}{8}\pi$

★(2)(3)は相似を利用してもよい。