分点公式と円の接線

分点公式

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ に対して.

1. PはABを $m:n$ に内分する点.

$$P\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

2. QはABを $m:n$ に外分する点.

$$Q\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

☆ 2の $m:n$ に外分は

$m>n$ のとき.

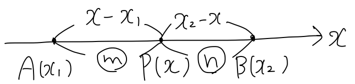
「$m:(-n)$ に内分」 (内分点の n を $-n$ におきかえる)

$m<n$ のとき、

「$-m:n$ に内分」 (内分点の m を $-m$ におきかえる)

と考えるとよい

(証明) 数直上において. $P(x)$ とすると.



$AP:BP=m:n$ より.

$$(x-x_1):(x_2-x)=m:n$$

$$n(x-x_1)=m(x_2-x)$$

$$(m+n)x=nx_1+mx_2$$

$$\therefore x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n}$$

Pの y 座標も同様にすると. $y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}$

$$\therefore P\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

問1. 上の方法で、$m>n$ のとき、
QがABを $m:n$ に外分するときのQ座標を求めよ。

問2. PがABを $m:n$ に内分するとき、$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$ を
成分で表すことで. Pの座標を求めよ。

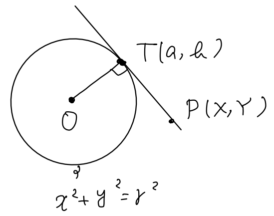
↳ $\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$

円の接線

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (a, b) における接線の方程式は. $ax+by=r^2$

(証明1) $T(a, b)$ とし、求める軌跡上の点を $P(X, Y)$ とする。

$\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{TP}=0$ より.



$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} X-a \\ Y-b \end{pmatrix}=0$$

$$a(X-a)+b(Y-b)=0$$

$$aX+bY=a^2+b^2$$

$T(a, b)$ は円 $x^2+y^2=r^2$ 上より. $a^2+b^2=r^2$

$$\therefore aX+bY=r^2$$

よって.
円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点における接線の方程式は. $ax+by=r^2$

(証明2)「正射影を利用」

$T(a, b)$ とし、求める軌跡上の点を $P(X, Y)$ とする。

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OT}=OT^2$ より. $aX+bY=r^2$ ($\because OT=r$)