# 図形と計量　演習プリント　解答

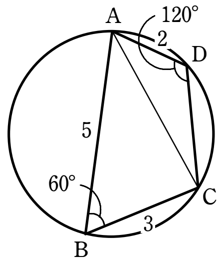
1．［同志社大］

(1)　△ABC において，余弦定理により

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos 60^\circ$

$=5^2+3^2-2\cdot 5\cdot 3\cdot \frac{1}{2}$

$=19$




また，四角形 ABCD は円に内接するから

$\angle ADC=180^\circ-\angle ABC=120^\circ$

よって，△ACD において，余弦定理により

$AC^2=CD^2+DA^2-2CD\cdot DA\cos 120^\circ$

すなわち　$19=CD^2+2^2-2CD\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$　　ゆえに　$(CD+5)(CD-3)=0$

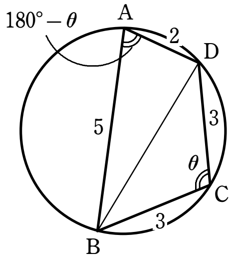
$CD>0$ であるから　$CD=3$

(2)　四角形 ABCD の面積は

$\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin 60^\circ+\frac{1}{2}CD\cdot DA\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{21\sqrt{3}}{4}$

(3)　$\angle BCD=\theta$ とおくと　$\angle BAD=180^\circ-\theta$




△BCD において，余弦定理により

$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\theta$

$=3^2+3^2-2\cdot 3\cdot 3\cos\theta$

$=18-18\cos\theta$　……①

△ABD において，余弦定理により

$BD^2=AB^2+DA^2-2AB\cdot DA\cos(180^\circ-\theta)$

$=5^2+2^2-2\cdot 5\cdot 2\cdot(-\cos\theta)$

$=29+20\cos\theta$　……②

①，② から　$18-18\cos\theta=29+20\cos\theta$　　ゆえに　$\cos\theta=-\frac{11}{38}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より，$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{11}{38}\right)^2}=\frac{21\sqrt{3}}{38}$

したがって　$\triangle BCD=\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{21\sqrt{3}}{38}=\frac{189\sqrt{3}}{76}$

別解　$\angle BCD=\theta$ とおくと，四角形 ABCD の面積は

$\triangle BCD+\triangle BAD=\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin\theta+\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin(180^\circ-\theta)$

$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2\sin\theta=\frac{19}{2}\sin\theta$

これと (2) より，四角形 ABCD の面積について　$\frac{19}{2}\sin\theta=\frac{21\sqrt{3}}{4}$

ゆえに　$\sin\theta=\frac{21\sqrt{3}}{38}$　　したがって　$\triangle BCD=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{21\sqrt{3}}{38}=\frac{189\sqrt{3}}{76}$

(4)　① より　$BD^2=18(1-\cos\theta)=18\left\{1-\left(-\frac{11}{38}\right)\right\}=\frac{9\cdot 49}{19}$

$BD>0$ であるから　$BD=\sqrt{\frac{9\cdot 49}{19}}=\frac{21\sqrt{19}}{19}$

参考　円に内接する四角形 ABCD において，トレミーの定理により

$AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD$

よって　$\sqrt{19}BD=5\cdot 3+3\cdot 2$　　ゆえに　$BD=\frac{21\sqrt{19}}{19}$

2．［明治大］

(1)　△ABC において，余弦定理により　$\cos A=\frac{15^2+14^2-13^2}{2\cdot 15\cdot 14}=\frac{{}^{ア}3}{{}^{イ}5}$

$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{{}^{ウ}4}{{}^{エ}5}$

(2)　△ABC の外接円の半径を $R$ とすると，正弦定理により

$R=\frac{BC}{2\sin A}=\frac{13}{2\cdot\frac{4}{5}}=\frac{{}^{オ}65}{{}^{カ}8}$

また，△ABC の内接円の半径を $r$ とすると

$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(AB+BC+CA)$　……①

ここで，△ABC の面積は　$\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 14\cdot\frac{4}{5}=84$

ゆえに，① から　$84=\frac{1}{2}r(15+13+14)$

よって　$r={}^{キ}4$

(3)　△ABC の内接円と辺 CA，AB の接点をそれぞれ E，F とする。

$CD=x$ とすると　$CD=CE=x$

よって　$AF=AE=AC-CE=14-x$

$BF=BD=BC-CD=13-x$

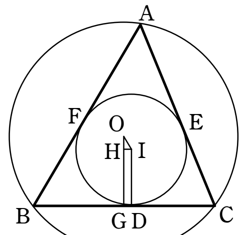
ここで，$AF+BF=15$ であるから　$(14-x)+(13-x)=15$

ゆえに　$x=DC={}^{ク}6$

△ABC の外心を O，点 O から辺 BC に下ろした垂線を OG とする。

点 O は辺 BC の垂直二等分線上にあるから

$BG=\frac{1}{2}BC=\frac{13}{2}$




OB は △ABC の外接円の半径と等しいから

$OB=\frac{65}{8}$

よって　$OG=\sqrt{OB^2-BG^2}=\sqrt{\left(\frac{65}{8}\right)^2-\left(\frac{13}{2}\right)^2}$

$=\frac{39}{8}$

ゆえに，△ABC の外心と辺 BC との距離は $\frac{{}^{ケ}39}{{}^{コ}8}$ である。

△ABC の内心を I，I から線分 OG に下ろした垂線を IH とする。

ここで　$IH=BD-BG=(13-6)-\frac{13}{2}=\frac{1}{2}$

$OH=OG-ID=\frac{39}{8}-4=\frac{7}{8}$

よって　$OI=\sqrt{IH^2+OH^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{65}}{8}$

ゆえに，△ABC の外心と内心との距離は $\frac{\sqrt{{}^{サ}65}}{{}^{シ}8}$ である。

3．［福岡大］

$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ とする。

△ABC において，正弦定理により $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ であるから

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

よって　$a:b:c=7:5:4$

ここで，$a=7k$，$b=5k$，$c=4k$ とする。

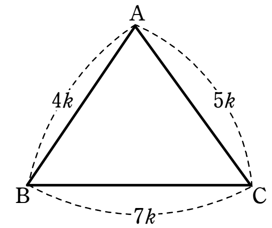
△ABC において，余弦定理により　$\cos A=\frac{(5k)^2+(4k)^2-(7k)^2}{2\cdot 5k\cdot 4k}={}^{ア}-\frac{1}{5}$

$0<A<2\pi$ より $\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

△ABC の面積を $S$ とすると

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 5k\cdot 4k\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$=4\sqrt{6}k^2$　……①




また，△ABC の内接円の半径を $r$ とすると，内接円の面積が $6\pi$ であることから　$r^2\pi=6\pi$

$r>0$ より　$r=\sqrt{6}$

ゆえに　$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}(7k+5k+4k)$

$=8\sqrt{6}k$　……②

①，② から　$4\sqrt{6}k^2=8\sqrt{6}k$

よって　$k=2$　　したがって　$a=14$，$b=10$，$c=8$

すなわち　$(AB,\ BC,\ CA)={}^{イ}(8,\ 14,\ 10)$

4．［西南学院大］

(1)　$a<a+2<a+4$ であるから，三角形の成立条件は

$a+4<a+(a+2)$　　よって　$a>2$　……①

さらに，鈍角三角形となるための条件は

$a^2+(a+2)^2<(a+4)^2$

よって　$a^2-4a-12<0$　　すなわち　$(a+2)(a-6)<0$

したがって　$-2<a<6$　……②

①，② の共通範囲を求めて　${}^{ア}2<a<{}^{イ}6$

(2)　長さ $a+4$ の辺に対する角が $120^\circ$ になるから，余弦定理により

$(a+4)^2=a^2+(a+2)^2-2a(a+2)\cos 120^\circ$

整理して　$2(a^2-a-6)=0$　　すなわち　$(a+2)(a-3)=0$

$2<a<6$ から　$a={}^{ウ}3$

外接円の半径を $R$ とすると，正弦定理により

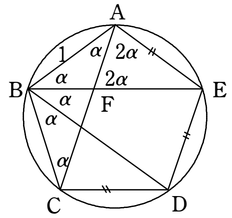
$\frac{a+4}{\sin 120^\circ}=2R$　すなわち　$\frac{7}{\sin 120^\circ}=2R$

よって　$R=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}={}^{エ}\frac{7\sqrt{3}}{3}$

５．［日本赤十字看護大］

(1)　正五角形の１つの内角は 108° で $\angle \mathrm{ABE}=\alpha$ とおくと $\mathrm{AE}=\mathrm{ED}=\mathrm{CD}$ であるから，円周角の定理により $\angle \mathrm{ABC}=3\alpha$

$3\alpha=108^\circ$ から $\alpha=36^\circ$




(2)　$\mathrm{AF}=x$ とおくと，

$\mathrm{BE}=\mathrm{BF}+\mathrm{FE}=\mathrm{AF}+\mathrm{AE}=x+1$

$\triangle \mathrm{ABE} \backsim \triangle \mathrm{FAB}$ から

$\mathrm{AB}:\mathrm{BE}=\mathrm{AF}:\mathrm{AB}$　よって　$1:(x+1)=x:1$

ゆえに　$x^2+x-1=0$

$x>0$ から $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$　よって　$\mathrm{AF}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

(3)　$\cos\alpha=\dfrac{\mathrm{BC}^2+\mathrm{CF}^2-\mathrm{BF}^2}{2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CF}}=\dfrac{1+1-x^2}{2\cdot1\cdot1}=\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

別解　$\cos\alpha=\dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}=\dfrac{\frac{x+1}{2}}{1}=\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

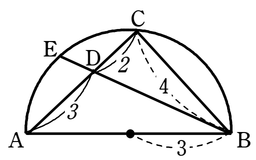
(4)　$\triangle \mathrm{BCF}$ の外接円の半径を $R$ とし，正弦定理から $R=\dfrac{\mathrm{BF}}{2\sin\alpha}=\dfrac{x}{2\sin\alpha}$

面積は $\pi R^2=\dfrac{\pi x^2}{4\sin^2\alpha}=\dfrac{\pi(1-x)}{4-4\cos^2\alpha}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{1}{4-\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}}\pi=\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\pi$

６．［明治薬科大］

$\triangle \mathrm{ABC}$ において，$\angle \mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$\sin\angle \mathrm{BAC}=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{{}^{\text{ア}}2}{3}$




また，三平方の定理により

$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2=6^2-4^2=20$

$\mathrm{AC}>0$ より　$\mathrm{AC}=2\sqrt{5}$

点 D は線分 AC を 3：2 に内分する点であるから

$\mathrm{CD}=\dfrac{2}{5}\mathrm{AC}=\dfrac{2}{5}\cdot2\sqrt{5}=\dfrac{{}^{\text{イ}}4\sqrt{5}}{5}$

$\triangle \mathrm{BCD}$ において，三平方の定理により

$\mathrm{BD}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2=4^2+\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2=\dfrac{96}{5}$

$\mathrm{BD}>0$ より　$\mathrm{BD}=\dfrac{4\sqrt{30}}{5}$

ここで，方べきの定理により　$\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DE}=\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}$

$\mathrm{DA}=\dfrac{3}{5}\mathrm{AC}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ であるから　$\dfrac{4\sqrt{30}}{5}\cdot\mathrm{DE}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\cdot\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

ゆえに　$\mathrm{DE}=\dfrac{24}{5}\cdot\dfrac{5}{4\sqrt{30}}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$

よって　$\mathrm{BE}=\mathrm{BD}+\mathrm{DE}=\dfrac{4\sqrt{30}}{5}+\dfrac{\sqrt{30}}{5}={}^{\text{ウ}}\sqrt{30}$

$\triangle \mathrm{ABC}$ は $\angle \mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形であるから，$\triangle \mathrm{ABC}$ の面積は

$\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot4=4\sqrt{5}$

$\triangle \mathrm{ABC}$ と $\triangle \mathrm{ACE}$ の面積の比は，線分 BD と線分 ED の長さの比に等しいから

$\triangle \mathrm{ACE}=\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BD}}\triangle \mathrm{ABC}=\dfrac{\sqrt{30}-\frac{4\sqrt{30}}{5}}{\frac{4\sqrt{30}}{5}}\cdot4\sqrt{5}={}^{\text{エ}}\sqrt{5}$

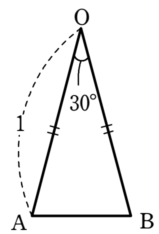
$\angle \mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\angle \mathrm{DBC}=\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{BD}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

$\triangle \mathrm{BCE}$ において，正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{CE}}{\sin\angle \mathrm{EBC}}=2\cdot3$

$\angle \mathrm{DBC}=\angle \mathrm{EBC}$ から　$\mathrm{CE}=2\cdot3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{6}}={}^{\text{オ}}\sqrt{6}$

７．［福島大］

(1)　$360\div12=30^\circ$ であるから，正十二角形の面積 $S_1$ は $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$，$\angle \mathrm{AOB}=30^\circ$ の二等辺三角形 OAB の面積の 12 倍である。




$\triangle \mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin30^\circ=\dfrac{1}{4}$ から　$S_1=12\cdot\dfrac{1}{4}=3$

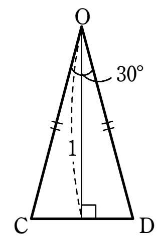
また，求める正十二角形の１辺の長さは AB であるから，余弦定理により

$\mathrm{AB}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos30^\circ=2-\sqrt{3}$

$\mathrm{AB}>0$ であるから

$\mathrm{AB}=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{3+1-2\sqrt{3\cdot1}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

(2)　求める正十二角形の面積 $S_2$ は，$\mathrm{OC}=\mathrm{OD}$，$\angle \mathrm{COD}=30^\circ$，底辺 CD に対する高さが１の二等辺三角形 OCD の面積の 12 倍である。




また，求める正十二角形の１辺の長さは CD である。(1) の $\triangle \mathrm{OAB}$ に対して $\triangle \mathrm{OAB} \backsim \triangle \mathrm{OCD}$ であり，$\triangle \mathrm{OAB}$ の底辺 AB に対する高さを $h$ とすると，相似比は $h:1$，面積比は $h^2:1^2$ である。

$\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot h=\dfrac{1}{4}$ から　$h=\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

よって　$\mathrm{AB}:\mathrm{CD}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}:1=1:\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=1:(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$\triangle \mathrm{OAB}:\triangle \mathrm{OCD}=1:(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=1:(8-4\sqrt{3})$

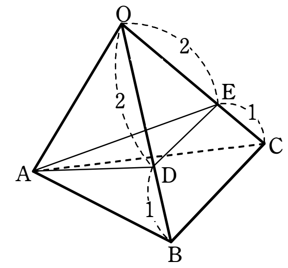
したがって，(1) より

$S_2=12\cdot\dfrac{8-4\sqrt{3}}{4}=24-12\sqrt{3}$，$\mathrm{CD}=\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{2}=4-2\sqrt{3}$

８．［佛教大］

(1)　$\triangle \mathrm{DAB}$ において

$\mathrm{AB}=3$，　$\mathrm{BD}=1$，　$\angle \mathrm{ABD}=60^\circ$




余弦定理から　$\mathrm{AD}^2=3^2+1^2-2\cdot3\cdot1\cdot\cos60^\circ=7$

$\mathrm{AD}>0$ であるから　$\mathrm{AD}=\sqrt{{}^{\text{ア}}7}$

また，$\triangle \mathrm{ADE}$ において

$\mathrm{AE}=\mathrm{AD}=\sqrt{7}$，　$\mathrm{DE}=\dfrac{2}{3}\mathrm{BC}=2$

余弦定理から

$\cos\angle \mathrm{DAE}=\dfrac{(\sqrt{7})^2+(\sqrt{7})^2-2^2}{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\dfrac{{}^{\text{イ}}5}{{}^{\text{ウ}}7}$

$\sin\angle \mathrm{DAE}>0$ より　$\sin\angle \mathrm{DAE}=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{7}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$

よって　$\triangle \mathrm{ADE}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}\sin\angle \mathrm{DAE}=\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{7}=\sqrt{{}^{\text{エ}}6}$

(2)　四面体 OABC の底面 OBC に対する高さは，四面体 OADE の底面 ODE に対する高さと一致する。

ゆえに，四面体 OADE の体積を $V'$ とすると　$V:V'=\triangle \mathrm{OBC}:\triangle \mathrm{ODE}$

$\triangle \mathrm{OBC}:\triangle \mathrm{ODE}=3^2:2^2$ であるから　$V'=\dfrac{{}^{\text{オ}}4}{{}^{\text{カ}}9}V$　……①

また，O から平面 ADE に引いた垂線の長さを $H'$ とすると

$V=\dfrac{1}{3}\triangle \mathrm{ABC}\cdot H$，　$V'=\dfrac{1}{3}\triangle \mathrm{ADE}\cdot H'$

$\triangle \mathrm{ABC}$ の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot3\sin60^\circ=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ であるから，(1) と ① より

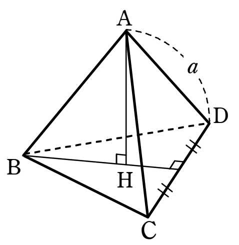
$H'=\dfrac{3}{\triangle \mathrm{ADE}}V'=\dfrac{3}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{4}{9}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9\sqrt{3}}{4}H\right)=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{キ}}2}}{{}^{\text{ク}}2}H$

# 図形と計量　演習プリント　解答

9．［早稲田大］

正四面体の 1 辺の長さを $a$ とする。

(1)　正四面体を右の図のように ABCD とし，A から平面 BCD に下ろした垂線を AH とすると，H は △BCD の重心である。



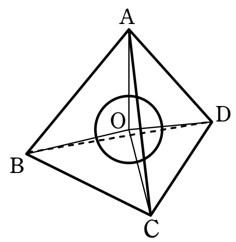

したがって　　$\mathrm{BH}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

よって　　$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{1}{3}a^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

$\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot a\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ であるから，正四面体 ABCD の体積 $V$ は

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{AH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

球の中心を O とすると，$V$ は四面体 OABC，OABD，OACD，OBCD の体積の和であるから




$$V=4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot 1=\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$$

ゆえに　　$\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^2$　　これより　　$a=2\sqrt{6}$

したがって，正四面体の 1 辺の長さは　　$2\sqrt{6}$

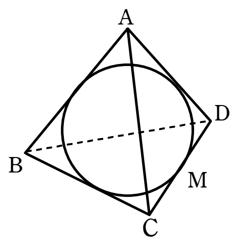
(2)　正四面体を ABCD とする。

すべての辺に接している球を，平面 ABC で切ったときの切り口は，△ABC の内接円である。したがって，それぞれの辺の接点は，それぞれの辺の中点である。

ここで，辺 CD の中点を M とし，平面 ABM で正四面体と球を切ったときの切り口を考える。

図形の対称性から，平面 ABM は球の中心を通る。

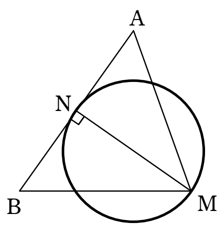
したがって，球の切り口の円の半径は球の半径に等しい。




ここで，辺 AB の中点を N とすると，△MAB が二等辺三角形であることから　　AB⊥MN

また，円は線分 AB に点 N で接しているから，円の中心は線分 MN 上にある。更に，M は正四面体の辺 CD の中点であるから，円は M を通る。

したがって，MN は円の直径であるから　　MN＝2




$\mathrm{BN}=\dfrac{1}{2}a$，$\mathrm{BM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ であるから，$\mathrm{BN}^2+\mathrm{MN}^2=\mathrm{BM}^2$ より

$$\frac{1}{4}a^2+2^2=\frac{3}{4}a^2$$　　これより　　$a=2\sqrt{2}$

したがって，正四面体の 1 辺の長さは　　$2\sqrt{2}$

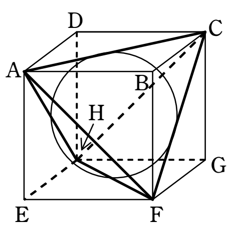
別解　右の図のような立方体 ABCD－EFGH を考える。

この立方体を 4 つの平面 ACF，ACH，AHF，CFH で切ると正四面体 ACFH ができる。

正四面体 ACFH のすべての辺に接する球は，立方体 ABCD－EFGH に内接する球である。

この球の半径が 1 のとき，立方体 ABCD－EFGH の 1 辺の長さは 2 であるから，正四面体 ACFH の 1 辺の長さは $2\sqrt{2}$ である。

したがって，求める正四面体の 1 辺の長さは　$2\sqrt{2}$



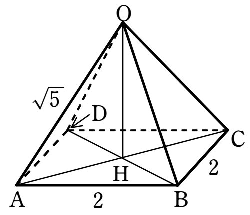

10．［千葉大］

(1)　底面 ABCD の対角線の交点を H とする。

点 H は二等辺三角形 OAC，OBD の底辺 AC，BD の中点であるから　　OH⊥AC，OH⊥BD

よって，OH と底面 ABCD は垂直であり，OH が四角錐 OABCD の高さになる。

$\mathrm{AH}=\sqrt{2}$ であるから




$$\mathrm{OH}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$$

(2)　球 $S$ の半径を $r$ とする。

辺 AB の中点を M とすると，AM＝1，OM⊥AB であるから

$$\mathrm{OM}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AM}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$$

よって　　$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OM}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$

△OBC，△OCD，△ODA の面積も同じである。

四角錐 OABCD は，各面を底面とする高さ $r$ の 5 つの角錐に分けられるから

$$\frac{1}{3}\cdot 2^2\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{3}\cdot 2^2\cdot r+\left(\frac{1}{3}\cdot 2\cdot r\right)\times 4$$

これを解いて　　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3)　表面積は　$4\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{4}{3}\pi$　　　　体積は　$\dfrac{4}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\dfrac{4\sqrt{3}}{27}\pi$