

図形と方程式（全部のせ）

【図形と方程式の公式集】

1. 2点間の距離

2点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 間の距離は、 $\mathbf{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

2. 分点公式

2点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ において、

① 線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の座標は、 $\mathbf{P}\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

② 線分 AB を $m:n$ に内分する点 Q の座標は、 $\mathbf{Q}\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$

3. 直線の方程式

点 (x_1, y_1) を通り、傾きが m の直線の方程式は

$\mathbf{y-y_1=m(x-x_1) \iff y=m(x-x_1)+y_1}$

4. 2直線の平行条件と垂直条件

2直線 $l_1:y=m_1x+n_1$, $l_2:y=m_2x+n_2$ について

① $\mathbf{l_1 \parallel l_2 \iff m_1=m_2}$ （傾きが等しい）

② $\mathbf{l_1 \perp l_2 \iff m_1m_2=-1}$ （傾きの積が-1）

◎一般形ver.（右ページに詳細があります）

2直線 $l_1:a_1x+b_1y+c_1=0$, $l_2:a_2x+b_2y+c_2=0$ について

③ $\mathbf{l_1 \parallel l_2 \iff a_1b_2-a_2b_1=0}$ ($\mathbf{a_1:b_1=a_2:b_2}$)

④ $\mathbf{l_1 \perp l_2 \iff a_1a_2+b_1b_2=0}$

5. 点と直線の距離

点 $P(x_1, y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は、 $\mathbf{d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

6. 円の方程式

点 (p, q) を中心とし、半径が r の円の方程式は、 $\mathbf{(x-p)^2+(y-q)^2=r^2}$

7. 円の接線の方程式

① 円の中心が原点にある

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ におけるこの円の接線の方程式は、 $\mathbf{x_1x+y_1y=r^2}$

② 円の中心が原点にない

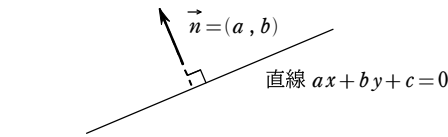
円 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ におけるこの円の接線の方程式は、

$\mathbf{(x_1-p)(x-p)+(y_1-q)(y-q)=r^2}$

【直線の法線ベクトルと2直線の平行条件と垂直条件】

直線 $ax+by+c=0$ の法線ベクトルの一つとして、 $\vec{n}=(a, b)$ がある。

つまり、 $\vec{n}$ は直線 $ax+by+c=0$ に垂直である。



(説明) $\vec{n}=(a, b)$ に垂直な直線を l とする。

直線 l 上に点 $A(x_1, y_1)$ とする。

また、直線 l 上に任意の点 $P(x, y)$ とする。

このとき、 $\overrightarrow{AP}=(x-x_1, y-y_1)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AP}$ より、 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP}=0$ である。

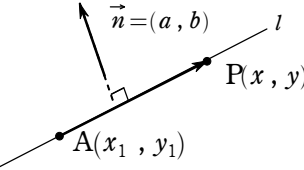
よって、直線 l の方程式は

$(a, b) \cdot (x-x_1, y-y_1)=0$ より、 $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0 \iff ax+by-ax_1-by_1=0$

$c=-ax_1-by_1$ とすると、直線 l の方程式は、 $ax+by+c=0$ である。

つまり、直線 $l:ax+by+c=0$ の x の係数 a を x 成分に、 y の係数 b を y 成分にした

ベクトル $\vec{n}=(a, b)$ は直線 l の法線ベクトルである。



直線の法線ベクトル

直線 $ax+by+c=0$ の法線ベクトルの一つは $\vec{n}=(a, b)$ である。

直線の法線ベクトルを利用すると、2直線の平行条件と垂直条件を容易に導ける。

2直線の平行条件と垂直条件

$l_1:a_1x+b_1y+c_1=0$, $l_2:a_2x+b_2y+c_2=0$ とする。

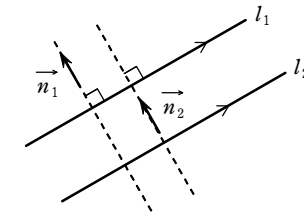
1. $l_1 \parallel l_2 \iff \mathbf{a_1b_2-a_2b_1=0}$ ($\mathbf{a_1:b_1=a_2:b_2}$)

2. $l_1 \perp l_2 \iff \mathbf{a_1a_2+b_1b_2=0}$

(説明) 2直線 l_1, l_2 を $l_1:a_1x+b_1y+c_1=0$, $l_2:a_2x+b_2y+c_2=0$ とする。

l_1, l_2 の法線ベクトルをそれぞれ $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ とすると、 $\vec{n_1}=(a_1, b_1)$, $\vec{n_2}=(a_2, b_2)$ である。

① $l_1 \parallel l_2$ のとき



① $l_1 \parallel l_2$ のとき

$l_1 \parallel l_2$ のとき、 $\vec{n_1} \parallel \vec{n_2}$ 、すなわち、 $(a_1, b_1) \parallel (a_2, b_2)$ である。

よって、 $a_1:b_1=a_2:b_2$ より、 $a_1b_2=a_2b_1 \iff a_1b_2-a_2b_1=0$ である。

② $l_1 \perp l_2$ のとき

$l_1 \perp l_2$ のとき、 $\vec{n_1} \perp \vec{n_2}$ 、すなわち、 $(a_1, b_1) \perp (a_2, b_2)$ である。

よって、 $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)=0$ より、 $a_1a_2+b_1b_2=0$ である。

【束の方程式】

2つの曲線 $C:f(x, y)=0 \cdots \textcircled{1}$, $D:g(x, y)=0 \cdots \textcircled{2}$ について、

(ただし、曲線 C, D は直線を表すこともある。)

曲線 C, D が交点 (x_1, y_1) をもつとき、

点 (x_1, y_1) は、 $f(x, y)=0$ および $g(x, y)=0$ 上にあるので、

$f(x_1, y_1)=0 \cdots \textcircled{3}$, $g(x_1, y_1)=0 \cdots \textcircled{4}$ が成り立つ。

①+ $k \times$ ②より、 $f(x, y)+k \cdot g(x, y)=0 \cdots (*)$

$(x, y)=(x_1, y_1)$ は、③, ④より、 $(*)$ を満たすので、点 (x_1, y_1) は $(*)$ 上にある。

つまり、方程式 $(*)$ は曲線 C, D の交点を通るグラフの方程式を表す。

束の方程式

曲線 $C:f(x, y)=0$, $D:g(x, y)=0$ について、
方程式 $f(x, y)+k \cdot g(x, y)=0$ は曲線 C, D の交点を通る
グラフの方程式を表す。

★「2つのグラフの交点を通る～(グラフ)」 $\implies$ 束の方程式

★2つのグラフの式を k 倍でつないだら、あとは x, y の次数を見てどんな
グラフになるのか考えよう。

問題

2つの円 $C_1:x^2+y^2=25$, $C_2:(x-4)^2+(y-3)^2=2$ について、

(1) C_1, C_2 の2つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

(2) C_1, C_2 の2つの交点を通り、点 $(3, 1)$ を通る円の方程式はを求めよ。

解答

k を定数とする。次の方程式で表される図形は、 C_1, C_2 の2つの交点を通る。

$k(x^2+y^2-25)+(x-4)^2+(y-3)^2-2=0 \cdots \cdots \textcircled{1}$

(1) ①で $k=-1$ とすると $8x+6y-48=0$

すなわち $4x+3y-24=0$

これが求める直線の方程式である。

(2) ①の表す図形が点 $(3, 1)$ を通るとき

$k(3^2+1^2-25)+(3-4)^2+(1-3)^2-2=0$

よって $k=\frac{1}{5}$

これを①に代入して整理すると $x^2+y^2-\frac{20}{3}x-5y+15=0$

これが求める円の方程式である。

注意 C_1 の半径は5, C_2 の半径は $\sqrt{2}$, C_1 と C_2 の中心間の距離は $d=\sqrt{4^2+3^2}=5$ で

あり、 $5-\sqrt{2}<d<5+\sqrt{2}$ であるから、 C_1 と C_2 は2つの交点をもつ。

図形と方程式（全部のせ）

【軌跡と領域のアプローチ】

◎ 軌跡

軌跡 … 与えられた条件を満たす点が描く図形 (点の集合)

与えられた条件を満たす点 P の軌跡が図形 F であることを示すには、

- 1. 条件を満たす任意の点 P は図形 F 上にある
- 2. 図形 F 上の任意の点 P は、与えられた条件を満たす

★ 「1」を同値な式変形で示している場合は、「2」の逆の証明は不要

●軌跡の求め方

軌跡上の点(動点)を (X, Y) とおき、条件を満たすような X, Y の関係式を求める

注 1. 求める軌跡上の点以外の動点は (s, t) などとおくとよい

注 2. パラメータ表示では、結果的にパラメータを消去することで、軌跡の方程式 (X, Y) の関係式)を得られるが、式変形が同値変形になっていない場合は、軌跡の方程式が得られたに過ぎない。
(与えられた条件の必要条件を求めただけで、十分条件になっていない)

注 3. 図形的に「除外点」や「軌跡の限界(定義域)」が生じることがある
(内分点の軌跡、重心の軌跡など)

★同値変形になっていない可能性がある式変形

- ・両辺を2乗する
- ・文字を掛ける or 文字で割る
- ・連立して文字を消去する (加減法, 代入法) など

◎ 逆像法

パラメータ表示された軌跡の問題や領域の最大・最小の根本的な考え方（原理）は、逆像法というものである。

例えば、 $P(x, y)$ がパラメータ t によって、 $x=f(t), y=g(t)$ で定義されているとする。（ただし、 t は任意の実数）

「 t の値を 1 つ定めれば、点 P の座標が 1 つ定まる」…(*)

しかし、任意の実数 t の値を用いて（代入して）、点 P 全体の集合を求めるのは困難である。（ t の値は無限にあるので）

(*) を逆に考えれば、軌跡上の点 P は、その点を作り出した実数 t が少なくとも一つ存在する（この考え方が逆像法）。

そこで、 $x=f(t), y=g(t)$ を同時に満たす実数 t が存在するような x, y の条件を考えれば、その条件（ x, y の関係式）が求める軌跡である。

●パラメータ表示された軌跡の問題のアプローチ

「パラメータの値（ t など）が存在するような点 (x, y) 全体の集合」が求める軌跡である。

◎ 領域の最大・最小

●点 (x, y) が領域 D 内を動くときの $f(x, y)$ の最大値・最小値の問題

$f(x, y)$ の値が k である

$\Leftrightarrow f(x, y)=k$ を満たす点 (x, y) が領域 D 内に存在する

$\Leftrightarrow f(x, y)=k$ と領域 D が共有点をもつ

★ 領域の最大・最小は k とおく。ぶつかり始め終わりが最大・最小。

($f(x, y)=k$ と領域 D が共有点をもつような k の最大値・最小値を求める)

◎ 連立方程式の同値性

1. 加減法の原理

$$\begin{cases} f(x, y)=0 \\ g(x, y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} af(x, y)+b \cdot g(x, y)=0 \\ f(x, y)=0 \text{ (or } g(x, y)=0) \end{cases} \quad (\text{ただし、}(a, b) \neq (0, 0))$$

2. 代入法の原理

$$\begin{cases} f(x, y)=0 \\ y=g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, g(x))=0 \\ y=g(x) \end{cases} \quad \leftarrow \text{代入する方を残す}$$