図形と方程式（全部のせ）

【図形と方程式の公式集】

1. ２点間の距離

2 点 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$ 間の距離は、$\mathbf{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

2. 分点公式

2 点 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$ において、

① 線分ABを$m:n$ に内分する点Pの座標は、$\mathrm{P}\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

② 線分ABを$m:n$ に内分する点Q の座標は、$\mathrm{Q}\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$

３. 直線の方程式

点$(x_1,\ y_1)$を通り，傾きが m の直線の方程式は

$\boldsymbol{y-y_1=m(x-x_1)} \iff \boldsymbol{y=m(x-x_1)+y_1}$

4. ２直線の平行条件と垂直条件

2 直線 $l_1:y=m_1x+n_1$, $l_2:y=m_2x+n_2$ について

① $l_1 /\!/ l_2 \iff m_1=m_2$ **（傾きが等しい）**

② $l_1 \perp l_2 \iff m_1m_2=-1$ **（傾きかけて-1）**

◎一般形ver.（右ページに詳細があります）

2 直線 $l_1:a_1x+b_1y+c_1=0$, $l_2:a_2x+b_2y+c_2=0$ について

③ $l_1 /\!/ l_2 \iff a_1b_2-a_2b_1=0$ $(a_1:b_1=a_2:b_2)$

④ $l_1 \perp l_2 \iff a_1a_2+b_1b_2=0$

5. 点と直線の距離

点 P$(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は、$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

6. 円の方程式

点$(p,\ q)$を中心とし，半径が r の円の方程式は、$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$

7. 円の接線の方程式

① 円の中心が原点にある

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 P$(x_1,\ y_1)$ におけるこの円の接線の方程式は、$x_1x+y_1y=r^2$

② 円の中心が原点ににない

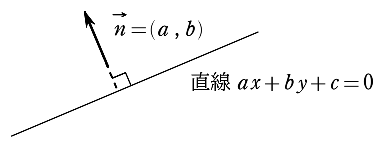
円 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 上の点 P$(x_1,\ y_1)$ におけるこの円の接線の方程式は、

$(x_1-p)(x-p)+(y_1-q)(y-q)=r^2$

【直線の法線ベクトルと２直線の平行条件と垂直条件】

直線$ax+by+c=0$ の法線ベクトルの一つとして、$\vec{n}=(a\ ,b)$ がある。

つまり、$\vec{n}$ は直線 $ax+by+c=0$に垂直である。



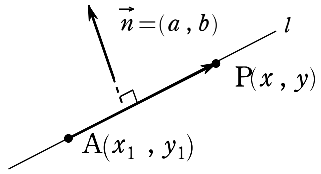
(説明) $\vec{n}=(a\ ,b)$に垂直な直線をl とする。

直線 l 上に点A$(x_1\ ,y_1)$をとる。

また、直線 l 上に任意の点P$(x\ ,y)$ とする。

このとき、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-x_1\ ,y-y_1)$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より、$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ である。



よって、直線 l の方程式は

$(a\ ,b)\cdot(x-x_1\ ,y-y_1)=0$より、$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0 \iff ax+by-ax_1-by_1=0$

$c=-ax_1-by_1$ とすると、直線 l の方程式は 、$ax+by+c=0$ である。

つまり、直線 $l:ax+by+c=0$ のxの係数 a をx 成分に、y の係数 b をy 成分にしたベクトル $\vec{n}=(a\ ,b)$ は直線 l の法線ベクトルである。

直線の法線ベクトル

直線 $ax+by+c=0$ の法線ベクトルの一つは$\vec{n}=(a\ ,b)$ である。

直線の法線ベクトルを利用すると、2 直線の平行条件と垂直条件を容易に導ける。

2 直線の平行条件と垂直条件

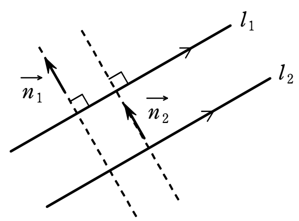
$l_1:a_1x+b_1y+c_1=0$, $l_2:a_2x+b_2y+c_2=0$ とする。

1. $l_1 /\!/ l_2 \iff a_1b_2-a_2b_1=0$ $(a_1:b_1=a_2:b_2)$
2. $l_1 \perp l_2 \iff a_1a_2+b_1b_2=0$

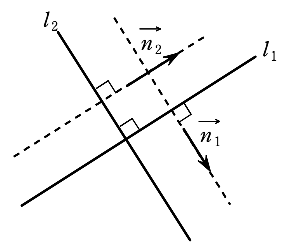
(説明) 2 直線 l_1 , l_2 を $l_1:a_1x+b_1y+c_1=0$, $l_2:a_2x+b_2y+c_2=0$ とする。

l_1 , l_2 の法線ベクトルをそれぞれ$\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ とすると、$\vec{n_1}=(a_1\ ,b_1)$, $\vec{n_2}=(a_2\ ,b_2)$ である。

① $l_1 /\!/ l_2$ のとき



② $l_1 \perp l_2$ のとき



① $l_1 /\!/ l_2$ のとき

$l_1 /\!/ l_2$ のとき、$\vec{n_1} /\!/ \vec{n_2}$、すなわち、$(a_1\ ,b_1) /\!/ (a_2\ ,b_2)$ である。

よって、$a_1:b_1=a_2:b_2$ より、$a_1b_2=a_2b_1 \iff a_1b_2-a_2b_1=0$ である。

② $l_1 \perp l_2$ のとき

$l_1 \perp l_2$ のとき、$\vec{n_1}\perp\vec{n_2}$、すなわち、$(a_1\ ,b_1)\perp(a_2\ ,b_2)$である。

よって、$(a_1\ ,b_1)\cdot(a_2\ ,b_2)=0$ より、$a_1a_2+b_1b_2=0$ である。

【束の方程式】

2 つの曲線 C：$f(x\ ,y)=0$ …① , D：$g(x\ ,y)=0$ …② について、

(ただし、曲線 C , D は直線を表すこともある。)

曲線 C , D が交点 $(x_1\ ,y_1)$ をもつとき、

点$(x_1\ ,y_1)$ は、$f(x\ ,y)=0$ および $g(x\ ,y)=0$ 上にあるので、

$f(x_1\ ,y_1)=0$ …③ , $g(x_1\ ,y_1)=0$ …④ が成り立つ。

①$+k\times$②より 、 $f(x\ ,y)+k\cdot g(x\ ,y)=0$ …(*)

$(x\ ,y)=(x_1\ ,y_1)$ は、③ , ④ より、(*) を満たすので、点 $(x_1\ ,y_1)$ は (*) 上にある。

つまり、 方程式 (*) は曲線C , D の交点を通るグラフの方程式を表す。

束の方程式

曲線 C：$f(x\ ,y)=0$, D：$g(x\ ,y)=0$ について、

方程式 $f(x\ ,y)+k\cdot g(x\ ,y)=0$ は曲線C , D の交点を通るグラフの方程式を表す。

★「２つのグラフの交点を通る～」 ⟹ 束の方程式

★ ２つのグラフの式を k 倍でつないだら、あとはx , y の次数を見てどんなグラフになるのか考えよう。

問題

2 つの円 $C_1:x^2+y^2=25$，$C_2:(x-4)^2+(y-3)^2=2$ について，

(1) C_1，C_2 の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

(2) C_1，C_2 の 2 つの交点を通り，点 $(3,\ 1)$ を通る円の方程式はを求めよ。

解答

k を定数とする。次の方程式で表される図形は，C_1，C_2 の 2 つの交点を通る。

$k(x^2+y^2-25)+(x-4)^2+(y-3)^2-2=0$ ……①

(1) ① で $k=-1$ とすると $8x+6y-48=0$

すなわち $4x+3y-24=0$

これが求める直線の方程式である。

(2) ① の表す図形が点 $(3,\ 1)$ を通るとき

$k(3^2+1^2-25)+(3-4)^2+(1-3)^2-2=0$

よって $k=\dfrac{1}{5}$

これを ① に代入して整理すると $x^2+y^2-\dfrac{20}{3}x-5y+15=0$

これが求める円の方程式である。

注意 C_1 の半径は 5，C_2 の半径は $\sqrt{2}$，C_1 と C_2 の中心間の距離は $d=\sqrt{4^2+3^2}=5$ であり，$5-\sqrt{2}<d<5+\sqrt{2}$ であるから，C_1 と C_2 は 2 つの交点をもつ。

図形と方程式（全部のせ）

【軌跡と領域のアプローチ】

◎ 軌跡

軌跡 … 与えられた条件を満たす点が描く図形 (点の集合)

与えられた条件を満たす点Ｐの軌跡が図形Ｆであることを示すには、
１．条件を満たす任意の点Ｐは図形Ｆ上にある
２．図形Ｆ上の任意の点Ｐは、与えられた条件を満たす
★「１」を同値な式変形で示している場合は、「２」の逆の証明は不要

> **●軌跡の求め方**
> **軌跡上の点(動点)を $(X\,,Y)$ とおき、条件を満たすような $X\,,Y$ の関係式を求める**

注１．求める軌跡上の点以外の動点は $(s\,,t)$ などとおくとよい
注２．パラメータ表示では、結果的にパラメータを消去することで、軌跡の方程式 ($X\,,Y$ の関係式) を得られるが、式変形が同値変形になっていない場合は、軌跡の方程式が得られたに過ぎない。
（与えられた条件の必要条件を求めただけで、十分条件になっていない）
注３．図形的に「除外点」や「軌跡の限界(定義域)」が生じることがある
（内分点の軌跡、重心の軌跡など）

★同値変形になっていない可能性がある式変形
- 両辺を2乗する
- 文字を掛ける or 文字で割る
- 連立して文字を消去する (加減法 , 代入法)　など

◎ 逆像法

パラメータ表示された軌跡の問題や領域の最大･最小の根本的な考え方（原理）は、逆像法というものである。

例えば、 $\mathrm{P}(x,y)$ が パラメータ t によって、$x=f(t)\,,\,y=g(t)$ で定義されているとする。（ただし、 t は任意の実数）
「 t の値を１つ定めれば、点Ｐの座標が１つ定まる」… (*)
しかし、任意の実数 t の値を用いて（代入して）、点Ｐ全体の集合を求めるのは困難である。（ t の値は無限にあるので）
(*) を逆に考えれば、**軌跡上の点Ｐは、その点を作り出した実数 t が少なくとも一つ存在する**（この考え方が逆像法）。
そこで、 $x=f(t)\,,\,y=g(t)$ を同時に満たす実数 t が存在するような $x\,,y$ の条件を考えれば、その条件（ $x\,,y$ の関係式）が求める軌跡である。

> **●パラメータ表示された軌跡の問題のアプローチ**
> **「パラメータの値（ t など）が存在するような点 $(x\,,y)$ 全体の集合」が求める軌跡である。**

◎ 領域の最大･最小

> **●点 $(x\,,y)$ が領域 D 内を動くときの $f(x\,,y)$ の最大値･最小値の問題**
> **$f(x\,,y)$ の値が k である**
> **$\Leftrightarrow$　$f(x\,,y)=k$ を満たす点 $(x\,,y)$ が領域 D 内に存在する**
> **$\Leftrightarrow$　$f(x\,,y)=k$ と領域 D が共有点をもつ**
> **★ 領域の最大･最小は k とおく。ぶつかり始め終わりが最大･最小。**
> （ $f(x,y)=k$ と領域 D が共有点をもつような k の最大値･最小値を求める）

◎ 連立方程式の同値性

１．加減法の原理

$$\begin{cases} f(x\,,y)=0 \\ g(x\,,y)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a f(x\,,y)+b\cdot g(x\,,y)=0 \\ f(x\,,y)=0\ (or\ g(x\,,y)=0) \end{cases}$$

（ただし、$(a\,,b)\neq(0\,,0)$）

２．代入法の原理

$$\begin{cases} f(x\,,y)=0 \\ y=g(x) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x\,,g(x))=0 \\ y=g(x) \end{cases}$$

←代入する方を残す