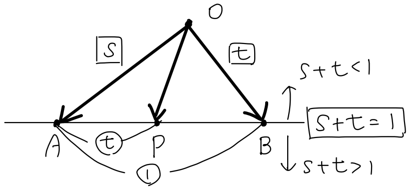
ベクトルの立式 (平面ベクトル)

◎ Pが直線AB上



Pが直線AB上のとき、

$\boxed{\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}}$ …① と表せる。

①において、始点をOにすると、

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$\boxed{\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}}$ …②

②について、

- AP : PB = t : (1−t) とおいて立式しても同じものになる
- Pが外分点でも使える (t<0 or 1<t の場合)

②において、1−t = s とおくと

$\boxed{\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\ (s+t=1)}$

☆「s+t=1」を共線条件という

☆ 共線条件を利用するときは、
1. 始点がそろっている
2. 終点3点が同一直線上にある
を確認すること!!

コメント

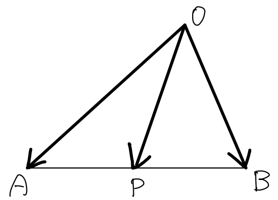
左の内容をしっかり理解して、自分の好きな方法で、ベクトルの立式の仕方を確立しましょう。

特に、マーク式の試験では、立式が誘導でついたりするので、理解して、誘導にのれるようにしましょう。

次の問題でいろんな立式方法を見ていこう。

問題

3点O, A, Bは同一直線上にないものとする。点Pが線分AB上にあるとき、$\overrightarrow{OP}$を$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$と適当な実数を用いて表せ。



(その1) 内分点の公式を利用

AP : PB = t : (1−t) とおくと

$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

(その2) 根本からスタート

PはAB上より、$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ とおける。

よって、$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$\therefore\ \overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

(その3) 直線のベクトル方程式 (つなげる)

PはAB上より

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ とおける。

よって $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$\therefore\ \overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

(その4) 常識として、利用

PはAB上より、

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とおける。

(その5) 共線条件を利用

PはAB上より、

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\ (s+t=1)$ とおける。

解説

(その1)〜(その5)の結果の式は全て、$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ であり、同じになっている。

((その5)もsを消去すれば、同じになる)

(その1)では、AP : PB = t : (1−t) とおくと、暗黙の了解で、0<t<1となり、Pは内分点に限定される。

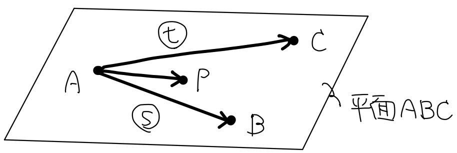
(その2)〜(その5)の立式の仕方は、Pが ABの内分点,外分点のどちらの場合も含んでおり、万能である。

オススメは、(その4)であり、根本は、$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$から作られていると理解しておくとよい。

問題文や図の状況で明らかに、内分点と分かる場合は、s : (1−s) or t : (1−t) などとおくのも立式しやすいので、悪くないと思います。

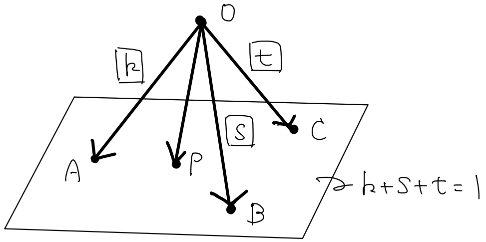
ベクトルの立式 (空間ベクトル)

◎ Pが平面ABC上



Pが平面ABC上のとき、

$\boxed{\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}}$ … ① と表せる。



① において、始点をOにすると、

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$\boxed{\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}}$ … ②

② について、

s≧0, t≧0, s+t≦1のとき、
Pは△ABCの内部および周上にあり、
そうでないとき、△ABCの外部にある。

② において、$1-s-t=k$ とおくと、

$\boxed{\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC} \quad (k+s+t=1)}$

☆「k+s+t=1」を共面条件という

☆ 共面条件を利用するときは、

1.「始点がそろっている」
2.「終点4点が同一平面上にある」
を確認すること!!

コメント

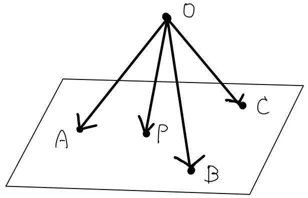
上の内容をしっかり理解して、自分の好きな方法でベクトルの立式の仕方を確立しましょう。

特に、マーク式の試験では、立式が誘導でついたりするので、理解して、誘導にのれるようにしましょう。

次の問題でいろんな立式方法を見ていこう。

問題

4点O, A, B, Cは、同一平面上にないものとする。点Pが平面ABC上にあるとき、$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ と適当な実数を用いて表せ。



(その1) 根本からスタート

Pは平面ABC上より、

$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおける。

よって、

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$\therefore \overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$

(その2) つなげる

Pは平面ABC上より、

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおける。

よって、

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$\therefore \overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$

(その3) 常識として、利用

Pは平面ABC上より、

$\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$ とおける。

(その4) 共面条件を利用

Pは平面ABC上より、

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$ $(s+t+u=1)$ とおける。

解説

(その1)〜(その4)の結果の式は全て

$\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$

であり、同じになっている。

((その4)もsを消去すれば、使っている文字が異なるだけで、同じである)