数列 演習プリント　解答

1．［京都産業大］

初項55，公差 -6 の等差数列の一般項 a_n は

$$a_n=55+(n-1)\cdot(-6)=-6n+61$$

$a_n<0$ とすると　$-6n+61<0$

これを解いて　$n>\dfrac{61}{6}=10.1\cdots\cdots$

よって，$n\leqq 10$ のとき　$a_n>0$，　$n\geqq 11$ のとき　$a_n<0$

ゆえに，S_n は $n=10$ のとき最大となるから

$$S_{10}=\frac{1}{2}\cdot 10\{2\cdot 55+(10-1)\cdot(-6)\}=280$$

2．［大阪工業大］

数列 $\{a_n\}$ の初項を a_1，公比を r とする。

$a_3+a_4+a_5=56$ から　$a_1r^2+a_1r^3+a_1r^4=56$　よって　$a_1r^2(1+r+r^2)=56$　……①

$a_6+a_7+a_8=7$ から　$a_1r^5+a_1r^6+a_1r^7=7$　よって　$a_1r^5(1+r+r^2)=7$　……②

①，② より　$56r^3=7$　ゆえに　$r^3=\dfrac{1}{8}$　r は実数であるから　$r={}^{ア}\dfrac{1}{2}$

これを ① に代入すると　$\dfrac{1}{4}a_1\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)=56$　これを解いて　$a_1={}^{イ}128$

また　$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{128\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}={}^{ウ}\frac{1023}{4}$

3．［神奈川大］

a，2，b がこの順で等比数列であるから　$2^2=ab$　……①

$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{a}$ がこの順で等差数列であるから　$2\cdot\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a}$　……②

$b\neq 0$ であるから，① より　$\dfrac{1}{b}=\dfrac{a}{4}$

これを ② に代入すると　$2\cdot\dfrac{a}{4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a}$

両辺に $2a$ を掛けて整理すると　$a^2-a-2=0$

よって　$(a+1)(a-2)=0$　したがって　$a=-1,\ 2$

$a=-1$ のとき　$b=\dfrac{4}{-1}=-4$，　$a=2$ のとき　$b=\dfrac{4}{2}=2$

a，b は相異なる実数であるから，$a=b=2$ は条件を満たさない。

よって　$a={}^{ア}-1$，$b={}^{イ}-4$

4．［西南学院大］

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n=n^2+{}^{イ}2n$　（(ア) は 1）

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2n}{2n+1}=\dfrac{n}{{}^{エ}2n+1}$　（(ウ) は 1）

(3) $\displaystyle S=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k2^{k-1}$ とする。

$(-1)^k2^{k-1}=-1\cdot(-2)^{k-1}$ であるから，S は初項 -1，公比 -2 の等比数列の第1項から第 $2n$ 項までの和であるから

$$S=\frac{-1\cdot\{1-(-2)^{2n}\}}{1-(-2)}=\frac{1}{3}\{(-2)^{2n}-1\}$$

ここで，$(-2)^{2n}=\{(-2)^2\}^n=4^n$ であるから　$S=\dfrac{1}{{}^{オ}3}({}^{カ}4^n-1)$

5．［(1) 大阪薬科大　(2) 立教大　(3) 中央大］

(1) （与式）$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

(2) $\dfrac{3}{(3k-1)(3k+2)}=\dfrac{1}{3k-1}-\dfrac{1}{3k+2}$

よって　（与式）$=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{8}\right)+\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{11}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}=\frac{3n}{2(3n+2)}$$

(3) $S_n=1+2\cdot\dfrac{1}{3}+3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+4\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots+n\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\dfrac{1}{3}S_n=1\cdot\dfrac{1}{3}+2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots+(n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

辺々を引いて

$$\frac{2}{3}S_n=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}-n\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

よって　$S_n=\dfrac{9}{4}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}-\dfrac{3}{2}n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\dfrac{9}{4}-\dfrac{6n+9}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

6．［愛知工業大］

初項 a_1 は　$a_1=S_1=\dfrac{1}{2}$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{n^2-(n-1)(n+1)}{n(n+1)}$

よって　$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$　……①

① で $n=1$ とすると $a_1=\dfrac{1}{2}$ が得られるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n={}^{ア}\dfrac{1}{n(n+1)}$

また　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}={}^{イ}\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

7．［立命館大］

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{d_n\}$ とすると，$\{d_n\}$ は 4，6，8，…… となり，これは初項 4，公差 2 の等差数列である。

したがって　$d_n=2n+2$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)=2+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)$$

$$=2+n^2-n+2n-2=n^2+n$$

$=n(n+1)$　……①

初項は $a_1=2$ なので，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

以上から，$\{a_n\}$ の一般項は　$a_n={}^{ア}n(n+1)$

$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3)=\frac{{}^{イ}n(n+1)(n+2)}{3}$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n={}^{ウ}\dfrac{1}{n(n+1)}$

$\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}={}^{エ}\frac{n}{n+1}$$

数列 $\{c_n\}$ の一般項は　$c_n=\dfrac{1}{{}^{オ}\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

ここで　$c_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

よって，$\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=(\cancel{\sqrt{2}}-1)+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}})$$

$$={}^{カ}\sqrt{n+1}-1$$

8．［立命館大］

(1)　群に分ける前の数列を $\{a_n\}$ とすると

$$a_n=2^{n-1}$$

初項から第 3 群の末項までの項の数は

$$2+4+6=12$$

よって，第 4 群の 5 番目の項は，もとの数列の第 17 項であるから

$$a_{17}=2^{16}=65536$$

(2)　求める和は，初項から第 12 項までの和であるから

$$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{12}=\frac{1\cdot(2^{12}-1)}{2-1}=4095$$

(3)　$k\geqq 2$ のとき，初項から第 $(k-1)$ 群の末項までの項の数は

$$2+4+\cdots\cdots+2(k-1)=(k-1)k=k^2-k$$

よって，第 k 群の最初の項は，もとの数列の第 (k^2-k+1) 項であるから，求める数は

$$a_{k^2-k+1}=2^{(k^2-k+1)-1}=2^{k^2-k}$$

これは $k=1$ のときも成り立つ。

(4)　(3) より，第 k 群に含まれる数の総和は，初項 2^{k^2-k}，公比 2，項数 $2k$ の等比数列の和であるから

$$\frac{2^{k^2-k}\cdot(2^{2k}-1)}{2-1}=2^{k^2-k}(2^{2k}-1)$$

9．［滋賀大］

(1)　第 28 群に入るすべての項の和は

$$\frac{1}{28}(1+2+3+\cdots\cdots+28)=\frac{1}{28}\cdot\frac{1}{2}\cdot 28\cdot(1+28)=\frac{29}{2}$$

(2)　$n\geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに含まれる項の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n \quad \cdots\cdots ①$$

よって，第 n 群の最初の数は　　第 $\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}$ 項

すなわち，第 $\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1\right)$ 項である。

これは $n=1$ のときも成り立つ。

(3)　① から，第 2016 項が第 n 群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<2016\leqq\frac{1}{2}n(n+1) \quad \cdots\cdots ②$$

$\frac{1}{2}\cdot 62\cdot 63=1953$，$\frac{1}{2}\cdot 63\cdot 64=2016$ であるから，② を満たす自然数 n は　　$n=63$

したがって，第 2016 項は第 63 群の最後の数であるから　　$\frac{63}{63}$

10．［(1) 中央大　(2) 東京電機大］

(1)　漸化式から　　$a_{n+1}-a_n=4^n$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項が 3，階差数列の第 n 項が 4^n であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}4^k=3+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}$$

$$=\frac{1}{3}(4^n+5)$$

この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　　$a_n=\frac{1}{3}(4^n+5)$

(2)　$a_{n+1}-5=3(a_n-5)$ より，数列 $\{a_n-5\}$ は初項 $a_1-5=-2$，公比 3 の等比数列であるから

$$a_n-5=-2\cdot 3^{n-1} \qquad よって \quad a_n=5-2\cdot 3^{n-1}$$

11．［愛知大］

$a_2=\frac{1}{1+3\cdot 1}=\frac{1}{4}$，$a_3=\frac{\frac{1}{4}}{1+3\cdot\frac{1}{4}}=\frac{1}{4+3}=\frac{1}{7}$，$a_4=\frac{\frac{1}{7}}{1+3\cdot\frac{1}{7}}=\frac{1}{7+3}=\frac{1}{10}$ より，

$a_n=\frac{1}{3n-2}$　$\cdots\cdots$ ① と推測される。

この推測が正しいことを，数学的帰納法によって証明する。

[1]　$n=1$ のとき

① の右辺は　　$\frac{1}{3\cdot 1-2}=1$

初項は $a_1=1$ なので，① は $n=1$ のとき成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち $a_k=\frac{1}{3k-2}$ と仮定する。

$n=k+1$ のときを考える。

漸化式から　　$a_{k+1}=\frac{a_k}{1+3a_k}=\frac{\frac{1}{3k-2}}{1+3\cdot\frac{1}{3k-2}}$

$$=\frac{1}{3k-2+3}=\frac{1}{3(k+1)-2}$$

よって，① は $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2] から，① はすべての自然数 n について成り立つ。

よって，一般項 a_n は　　$a_n=\frac{1}{3n-2}$

12．［札幌医科大］

(1)　初項と漸化式から，数列 $\{a_n\}$ の各項は正の数である。

2 を底として，$a_{n+1}=16{a_n}^3$ の両辺の対数をとると

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2(16{a_n}^3)$$

よって　　$\log_2 a_{n+1}=\log_2 16+3\log_2 a_n$

すなわち　　$\log_2 a_{n+1}=3\log_2 a_n+4$

$b_n=\log_2 a_n$ とすると　　$b_{n+1}=3b_n+4$

これを変形して　　$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$

数列 $\{b_n+2\}$ は，初項 $b_1+2=\log_2 a+2$，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n+2=(\log_2 a+2)\cdot 3^{n-1}$$

したがって　　$b_n=(\log_2 a+2)\cdot 3^{n-1}-2$

(2)　$a_n=2^{b_n}$ であるから

$$a_n=2^{(\log_2 a+2)\cdot 3^{n-1}-2}=(2^{\log_2 4a})^{3^{n-1}}\cdot 2^{-2}=\frac{(4a)^{3^{n-1}}}{4}$$

(3)　$a_2=16{a_1}^3=16a^3$

すべての n について $a_n=a$ となるためには，$a_2=a$ であることが必要であるから

$$16a^3=a$$

よって　　$a(4a+1)(4a-1)=0$

$a>0$ であるから　　$a=\frac{1}{4}$

このとき，(2) の結果から　　$a_n=\frac{1^{3^{n-1}}}{4}=\frac{1}{4}=a$

となり，すべての n について $a_n=a$ を満たす。

したがって，求める a の値は　　$a=\frac{1}{4}$

13．［大阪府立大］

(1)　$a_1=\frac{1}{4}$ と漸化式より $a_n\fallingdotseq 0$ であるから，漸化式の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+1}{a_n} \qquad よって \qquad \frac{1}{a_{n+1}}=3+\frac{1}{a_n}$$

$\frac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　　$b_{n+1}=b_n+3$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=\frac{1}{a_1}=4$，公差 3 の等差数列であるから

$$b_n=4+(n-1)\cdot 3=3n+1$$

したがって　　$a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{3n+1}$

(2)　漸化式の両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}$$

$\frac{a_n}{3^n}=b^n$ とおくと　　$b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}$

これを変形すると　　$b_{n+1}-1=\frac{2}{3}(b_n-1)$

よって，数列 $\{b_n-1\}$ は初項 $b_1-1=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$b_n-1=-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad ゆえに \qquad \frac{a_n}{3^n}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

したがって　　$a_n=3^n-2^n$

(3)　$a_{n+1}=\left(1+\frac{2}{n}\right)a_n=\frac{n+2}{n}a_n$ であるから

$$a_n=\frac{n+1}{n-1}a_{n-1}=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}a_{n-2}$$

これを繰り返して　　$a_n=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1}a_1$

よって　　$a_n=\frac{(n+1)n}{2\cdot 1}\cdot 1$　　　すなわち　　$a_n=\frac{1}{2}n(n+1)$

14. ［奈良県立医科大］

$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ を変形すると

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n) \quad \cdots\cdots ①$$

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=a_{n+1}-2a_n \quad \cdots\cdots ②$$

① から，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=5-3=2$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-a_n=2\cdot 2^{n-1} \quad すなわち \quad a_{n+1}-a_n=2^n \quad \cdots\cdots ③$$

② から　$a_{n+1}-2a_n=a_n-2a_{n-1}=\cdots\cdots=a_2-2a_1=5-2\cdot 3=-1$

すなわち　$a_{n+1}-2a_n=-1$　$\cdots\cdots$ ④

③－④ から，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=2^n+1$

別解　$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$

よって，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=5-3=2$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1}-a_n=2\cdot 2^{n-1} \quad すなわち \quad a_{n+1}-a_n=2^n$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が 2^n であるから，

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=3+\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n+1$

$a_1=3$ であるから，これは $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=2^n+1$

15. ［熊本大］

(1)　$S_n=2a_n+n^2 \cdots\cdots$ ① から

$$S_{n+1}=2a_{n+1}+(n+1)^2$$

よって　$S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}-2a_n+2n+1$

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ であるから　$a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n+2n+1$

ゆえに　$a_{n+1}=2a_n-2n-1$　$\cdots\cdots$ ②

(2)　② から　$a_{n+2}=2a_{n+1}-2(n+1)-1$　$\cdots\cdots$ ③

③－② から

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)-2$$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n-2$

よって　$b_{n+1}-2=2(b_n-2)$

ここで，① に $n=1$ を代入して　$S_1=2a_1+1^2$

$S_1=a_1$ であるから　$a_1=2a_1+1$

ゆえに　$a_1=-1$

また，② から　$a_2=2a_1-2\cdot 1-1=-5$

よって　$b_1-2=(a_2-a_1)-2=-6$

ゆえに，数列 $\{b_n-2\}$ は初項 -6，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n-2=-6\cdot 2^{n-1}=-3\cdot 2^n$$

よって　$b_n=-3\cdot 2^n+2$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-3\cdot 2^k+2)=-1-3\cdot\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}+2(n-1)$

$$=-3\cdot 2^n+2n+3$$

この式に $n=1$ を代入すると，$a_1=-1$ であるから，$n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$a_n=-3\cdot 2^n+2n+3$

参考　$f(n)=\alpha n+\beta$ とし，$a_{n+1}=2a_n-2n-1$ が $a_{n+1}-f(n+1)=2\{a_n-f(n)\}$ の形に変形できるように定数 α，β を定めると　$\alpha=2$，$\beta=3$

このことから，a_n を求めてもよい。

16. ［金沢大］

(1)　$a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n=2^n-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　$\cdots\cdots$ ①

また，① から

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+(n-1)a_{n-1}=2^{n-1}-1$ $(n=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　$\cdots\cdots$ ②

よって，$n\geqq 2$ のとき，①－② から　$na_n=2^n-2^{n-1}$

ゆえに　$a_n=\dfrac{2^n-2^{n-1}}{n}=\dfrac{2^{n-1}}{n}$

① において $n=1$ とすると　$a_1=1$

よって，$a_n=\dfrac{2^{n-1}}{n}$ は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=\dfrac{2^{n-1}}{n}$

(2)　$S_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$ $\cdots\cdots$ ③ を数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき

$S_1=\dfrac{1}{a_1}=1$ であり，③ の右辺は $4-\dfrac{1+2}{2^0}=1$ であるから，成り立つ。

[2]　$n=m$ のとき

$S_m=4-\dfrac{m+2}{2^{m-1}}$ であると仮定すると，$n=m+1$ のとき

$$S_{m+1}=S_m+\frac{1}{a_{m+1}}=4-\frac{m+2}{2^{m-1}}+\frac{m+1}{2^m}$$

$$=4-\frac{2(m+2)-(m+1)}{2^m}=4-\frac{m+3}{2^m}$$

よって，$n=m+1$ のときも成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n に対して ③ は成り立つ。

(3)　$T_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{a_k}$ とおくと

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^{k-1}}=1+\frac{4}{2}+\frac{9}{4}+\frac{16}{8}+\cdots\cdots+\frac{n^2}{2^{n-1}} \quad \cdots\cdots ③$$

$$\frac{1}{2}T_n \quad = \quad \frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{9}{8}+\cdots\cdots+\frac{(n-1)^2}{2^{n-1}}+\frac{n^2}{2^n} \quad \cdots\cdots ④$$

③－④ から　$\dfrac{1}{2}T_n=1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{4}+\dfrac{7}{8}+\cdots\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}-\dfrac{n^2}{2^n}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\frac{n^2}{2^n}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{n^2}{2^n}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n^2}{2^n}=2S_n-2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{n^2}{2^n}$$

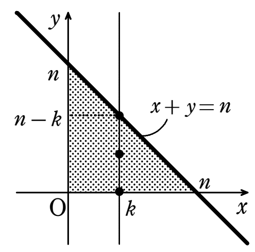
ここで，(2) の結果より $S_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$ であるから

$$\frac{1}{2}T_n=8-\frac{2(n+2)}{2^{n-1}}-2+\frac{2}{2^n}-\frac{n^2}{2^n}$$

よって　$T_n=12-\dfrac{n^2+4n+6}{2^{n-1}}$

17. ［中央大］

x 座標と y 座標がともに整数である点 $(x,\ y)$ を格子点とよぶことにする。



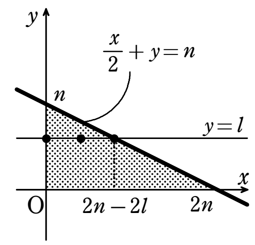
(1)　$x+y\leqq n$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ を表す領域は，右図の影がついた部分である。ただし，境界線を含む。

この領域内にある格子点のうち，直線 $x=k$ $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$ 上にある格子点の個数は，$0\leqq y\leqq n-k$ より　$n-k+1$ (個)

よって，求める点の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)=(n+1)+n+\cdots\cdots+1=\frac{n+1}{2}\{1+(n+1)\}$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2) \text{ (個)}$$



(2)　$\dfrac{x}{2}+y\leqq n$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ を表す領域は，右図の影がついた部分である。ただし，境界線を含む。

この領域内にある格子点のうち，直線 $y=l$ $(l=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$ 上にある格子点の個数は，$0\leqq x\leqq 2n-2l$ より　$2n-2l+1$ (個)

よって，求める点の個数は

$$\sum_{l=0}^{n}(2n-2l+1)=(2n+1)+(2n-1)+\cdots\cdots+1$$

$$=\frac{n+1}{2}\{1+(2n+1)\}=(n+1)^2 \text{ (個)}$$

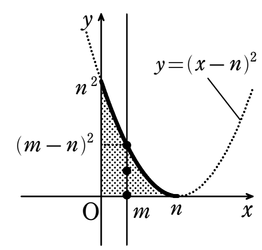
(3)　$x+\sqrt{y}\leqq n$ から　$\sqrt{y}\leqq -x+n$

$\sqrt{y}\geqq 0$ から　$-x+n\geqq 0$

よって　$0\leqq x\leqq n$

また，$\sqrt{y}\geqq 0$ より　$y\leqq(-x+n)^2$

すなわち　$y\leqq(x-n)^2$



よって，$x+\sqrt{y}\leqq n$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ を表す領域は図の影がついた部分である。ただし，境界線を含む。

この領域内にある格子点のうち，直線 $x=m$ $(m=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$ 上にある格子点の個数は，$0\leqq y\leqq(m-n)^2$ より　$(m-n)^2+1$ (個)

よって，求める点の個数は

$$\sum_{m=0}^{n}\{(m-n)^2+1\}=\sum_{m=0}^{n}(m-n)^2+n+1=\{n^2+(n-1)^2+\cdots+1\}+n+1$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n+1=\frac{1}{6}(n+1)\{n(2n+1)+6\}$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n+6) \text{ (個)}$$