漸化式

◎ 漸化式

$\{a_n\}$：$1, 3, 5, 7, 9, \cdots, 2n-1, \cdots$

⇩ 式で表すと、

$a_1 = 1$, $\underbrace{a_{n+1} = a_n + 2}_{\text{漸化式}}$ ← 前の項に2(公差)を足すと次の項になる。

漸化式の基本形

1. $a_{n+1} = a_n + d$　(等差型)
2. $a_{n+1} = r a_n$　(等比型)
3. $a_{n+1} = a_n + f(n)$　(階差型)
4. $a_{n+1} = p a_n + q$　(特性型)
5. $a_{n+1} = f(n) a_n$　(階比型)

☆ 3. $a_{n+1} = a_n + f(n)$ は、数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とすると、$a_{n+1} - a_n = b_n$ (定義)より、$b_n = f(n)$であり、$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ $(n \geqq 2)$ で a_n を求められる。

☆ 一般的に、基本形は1～3のことを指すが、この後出てくる「おきかえ型」の漸化式では、おきかえた後、4の形になり、誘導なしでスラスラ解けないといけないので、基本形に入れてある。

☆ 5も誘導なしで出題されることがある。

◎ 誘導あり(おきかえ型)の漸化式の解き方

ポイント

おきかえの式 $b_n = f(a_n)$ を利用して、$\{a_n\}$の漸化式を式変形して、$\{b_n\}$の漸化式を作る

流れ

1. $\underbrace{a_{n+1} = (a_n\text{の式})}_{\text{この形では困難}} \xrightarrow[(b_n = f(a_n))]{\text{おきかえ}} \underbrace{b_{n+1} = (b_n\text{の式})}_{\text{基本形1～4になるはず。}}$

2. $\{b_n\}$の漸化式を解いて、一般項b_nを求める。

3. おきかえの式$(b_n = f(a_n))$でb_nを消去し、一般項a_nを求める。

$\{b_n\}$の漸化式の作り方

(方法1)

$b_{n+1} = (a_{n+1}\text{の式})$ ← おきかえの式 $b_n = f(a_n)$のnを$n+1$にする

$= (a_n\text{の式})$ ↓ $\{a_n\}$の漸化式を利用

$= (b_n\text{の式})$ ↓ $f(a_n)$の形になるように式変形する

(方法2)

$b_{n+1} = f(a_{n+1})$なので、$a_{n+1} = (a_n\text{の式})$の両辺に適当な操作を行い、左辺を$f(a_{n+1})$の形にして、$b_{n+1} = (b_n\text{の式})$を作る。