

漸化式

◎ 漸化式

$\{a_n\}: 1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n-1, \dots$

⇩ 式で表すと.

$$a_1 = 1, \underbrace{a_{n+1} = a_n + 2}_{\text{漸化式}} \leftarrow \begin{array}{l} \text{前の項に2(公差)を足すと} \\ \text{次の項になる.} \end{array}$$

漸化式の基本形

1. $a_{n+1} = a_n + d$ (等差型)
2. $a_{n+1} = r a_n$ (等比型)
3. $a_{n+1} = a_n + f(n)$ (階差型)
4. $a_{n+1} = p a_n + q$ (特性生型)
5. $a_{n+1} = f(n) a_n$ (階比型)

☆ 3. $a_{n+1} = a_n + f(n)$ は、数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、 $a_{n+1} - a_n = b_n$ (定義) より、 $b_n = f(n)$ であり、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \quad (n \geq 2) \text{ で } a_n \text{ を求めらる.}$$

☆ 一般的に、基本形は1~3のことを指すが、この後出てくる「おきかえ型」の漸化式では、おきかえた後、4の形になり、誘導なしでスラスラ解けないといけないので、基本形に入れてある。

☆ 5も誘導なしで、出題されることがある。

◎ 誘導あり(おきかえ型)の漸化式の解き方

ポイント

おきかえの式 $b_n = f(a_n)$ を利用して、 $\{a_n\}$ の漸化式を式変形して、 $\{b_n\}$ の漸化式を作る

流れ

$$1. \underbrace{a_{n+1} = (a_n \text{ の式})}_{\text{この形では困難}} \xrightarrow[\text{(} b_n = f(a_n) \text{)}]{\text{おきかえ}} b_{n+1} = (b_n \text{ の式})$$

基本形1~4になるはず。

2. $\{b_n\}$ の漸化式を解いて、一般項 b_n を求める。

3. おきかえの式 ($b_n = f(a_n)$) で b_n を消去し、一般項 a_n を求める。

$\{b_n\}$ の漸化式の作り方

(方法1)

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= (a_{n+1} \text{ の式}) \leftarrow \text{おきかえの式 } b_n = f(a_n) \text{ の } n \text{ を } n+1 \text{ にする} \\ &= (a_n \text{ の式}) \downarrow \{a_n\} \text{ の漸化式を利用} \\ &= (b_n \text{ の式}) \downarrow f(a_n) \text{ の形になるように式変形する} \end{aligned}$$

(方法2)

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= f(a_{n+1}) \text{ なので、} a_{n+1} = (a_n \text{ の式}) \text{ の両辺に} \\ &\text{適当な操作を行い、左辺を } f(a_{n+1}) \text{ の形にして、} \\ b_{n+1} &= (b_n \text{ の式}) \text{ を作る。} \end{aligned}$$