漸化式

◎ 漸化式

$\{a_n\}$: 1, 3, 5, 7, 9, …, $2n-1$, …

⇩ 式で表すと、

$a_1=1$, $\underbrace{a_{n+1}=a_n+2}_{\text{漸化式}}$ ← 前の項に2(公差)を足すと次の項になる。

漸化式の基本形

1. $a_{n+1}=a_n+d$ (等差型)
2. $a_{n+1}=ra_n$ (等比型)
3. $a_{n+1}=a_n+f(n)$ (階差型)
4. $a_{n+1}=pa_n+q$ (特性型)

☆ 3. $a_{n+1}=a_n+f(n)$ は、数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、$a_{n+1}-a_n=b_n$ (定義)より、$b_n=f(n)$ であり、
$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$ $(n\geqq 2)$ で a_n を求めれる。

☆ 一般的に、基本形は1〜3のことを指すが、この後出てくる「おきかえ型」の漸化式では、おきかえた後、4の形になり、誘導なしでスラスラ解けないといけないので、基本形に入れてある。

◎ 誘導あり(おきかえつき)の漸化式の解き方

ポイント

おきかえの式 $b_n=f(a_n)$ を利用して、$\{a_n\}$ の漸化式を式変形して、$\{b_n\}$ の漸化式を作る

流れ

1. $\underbrace{a_{n+1}=(a_n\text{の式})}_{\text{この形では困難}}$ $\xrightarrow[(b_n=f(a_n))]{\text{おきかえ}}$ $\underbrace{b_{n+1}=(b_n\text{の式})}_{\text{基本形1〜4になるはず。}}$
2. $\{b_n\}$ の漸化式を解いて、一般項 b_n を求める。
3. おきかえの式 $(b_n=f(a_n))$ で b_n を消去し、一般項 a_n を求める。