マーク演習　No.4　解答

1．(1)　$y=2x^2-3x+2=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$

よって，頂点の座標は $\left(\frac{{}^{\text{ア}}3}{{}^{\text{イ}}4}, \frac{{}^{\text{ウ}}7}{{}^{\text{エ}}8}\right)$ である．

放物線①を，x 軸方向に 1，y 軸方向に -4 だけ平行移動すると

$y-(-4)=2(x-1)^2-3(x-1)+2$ から　$y=2x^2-{}^{\text{オ}}7x+{}^{\text{カ}}3$ である．

(2)　$-2x^2+k=0$ とおくと，$k>\frac{1}{2}$ から　$x=\pm\sqrt{\frac{k}{2}}$

また，$\mathrm{P}\,(a, 0)$, $\mathrm{P}'\,(-a, 0)$, $\mathrm{Q}\,(a, -2a^2+k)$ であるから

$$l=2\mathrm{PP}'+2\mathrm{PQ}=2\cdot2a+2(-2a^2+k)=-{}^{\text{キ}}4a^2+{}^{\text{ク}}4a+{}^{\text{ケ}}2k=-4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+2k+1$$

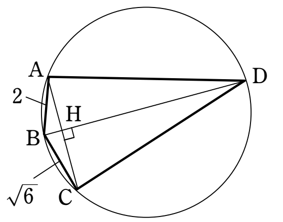
$0<a<\sqrt{\frac{k}{2}}$, $k>\frac{1}{2}$ から，$a=\frac{{}^{\text{コ}}1}{{}^{\text{サ}}2}$ のとき l は最大となり　$m={}^{\text{シ}}2k+{}^{\text{ス}}1$

$k^2-\frac{1}{4}<m$ から　$k^2-\frac{1}{4}<2k+1$　　よって　$\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{5}{2}\right)<0$

$k>\frac{1}{2}$ から　$\frac{1}{2}<k<\frac{5}{2}$

k は整数であるから　$k={}^{\text{セ}}1, {}^{\text{ソ}}2$

2．$\cos\angle\mathrm{ABC}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{{}^{\text{ア}}-\sqrt{{}^{\text{イ}}6}}{{}^{\text{ウ}}3}$



△ABC において，余弦定理により

$$\mathrm{AC}^2=2^2+(\sqrt{6})^2-2\cdot2\cdot\sqrt{6}\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=18$$

ゆえに　$\mathrm{AC}={}^{\text{エ}}3\sqrt{{}^{\text{オ}}2}$

円の半径を R とすると，正弦定理により　$\dfrac{3\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=2R$

ゆえに　$R=\frac{{}^{\text{カ}}3\sqrt{{}^{\text{キ}}6}}{{}^{\text{ク}}2}$

同様に $\frac{\sqrt{6}}{\sin\angle\mathrm{CAB}}=3\sqrt{6}$ から

$\sin\angle\mathrm{CAB}=\frac{{}^{\text{ケ}}1}{{}^{\text{コ}}3}$, $\frac{2}{\sin\angle\mathrm{ACB}}=3\sqrt{6}$ から　$\sin\angle\mathrm{ACB}=\frac{\sqrt{{}^{\text{サ}}6}}{{}^{\text{シ}}9}$

また，三角形 ABC の面積は $\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{{}^{\text{ス}}2}$ で

あり，$\mathrm{CH}=\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ACB}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right)^2}=\frac{{}^{\text{セ}}5\sqrt{{}^{\text{ソ}}2}}{{}^{\text{タ}}3}$, $\mathrm{BD}=\mathrm{BH}+\mathrm{HD}$

ここで　$\mathrm{BH}=\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{ACB}=\frac{2}{3}$,

$$\mathrm{HD}=\mathrm{CH}\tan\angle\mathrm{ACD}=\mathrm{CH}\tan(90^\circ-\angle\mathrm{BDC})=\mathrm{CH}\tan(90^\circ-\angle\mathrm{CAB})=\frac{\mathrm{CH}}{\tan\angle\mathrm{CAB}}$$

$\cos^2\angle\mathrm{CAB}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$ より $\tan^2\angle\mathrm{CAB}=\frac{1}{\cos^2\angle\mathrm{CAB}}-1=\frac{1}{8}$ であるから

$$\tan\angle\mathrm{CAB}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

ゆえに　$\mathrm{HD}=\frac{\mathrm{CH}}{\tan\angle\mathrm{CAB}}=\frac{5\sqrt{2}}{3}\cdot2\sqrt{2}=\frac{20}{3}$

したがって，$\mathrm{BD}=\frac{2}{3}+\frac{20}{3}=\frac{{}^{\text{チツ}}22}{{}^{\text{テ}}3}$ であり，四角形 ABCD の面積は

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{22}{3}={}^{\text{トナ}}11\sqrt{{}^{\text{ニ}}2}$$