S③の10番の補足プリント

$C_t: x^2+y^2-4tx+2(1-t)y+\frac{7}{2}t^2-2t+1=0$

C_t は、$(x-2t)^2+(y+1-t)^2=\frac{3}{2}t^2$ より、$t>0$ から

中心 $(2t,\ t-1)$、半径 $\sqrt{\frac{3}{2}}t$ ← すみません、絶対値はなくてよいです

よって、$t=1$ のとき、中心 $(2,0)$、半径 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (ア,イ)

また、円 C_t について、中心の x 座標 $2t$ と半径 $\frac{\sqrt{6}}{2}t$ は、t に関して単調増加するので、y 軸に平行な直線は、すべての C_t に接することはない。

(※)
答えのマークの形から、y 軸に平行な直線は、ありえないので、授業中に書いたくらいのさらっとした感じでよい。

よって、すべての C_t に接する直線を $y=mx+n$ とおくと、

円 C_t と $y=mx+n$ が接する条件は、

$$\frac{|2mt-t+1+n|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\,t$$

← 中心 $(2t,\ t-1)$ と直線 $mx-y+n=0$ のキョリ

$$\sqrt{2}\,|(2m-1)t+n+1|=\sqrt{3}\cdot\sqrt{m^2+1}\,t$$

両辺0以上より、2乗すると、

$$2\{(2m-1)t+(n+1)\}^2=3(m^2+1)t^2$$

$$2(2m-1)^2+4(2m-1)(n+1)t+2(n+1)^2=3(m^2+1)t^2\underline{+0t+0}$$

隠れている

これがすべての実数 t で成り立つ条件は、

$2(2m-1)^2=3(m^2+1)$, $n=-1$ ← (※ ※)

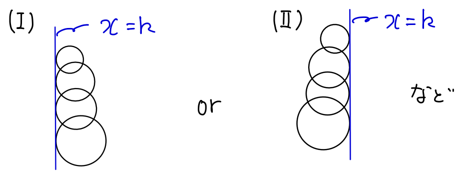
数学的には、右のようなことが起こっていますが、あまり深く考えずに、

①と②が同時に成り立つ条件は、②から考えれば、$n=-1$ であり、

この条件だけで①は成り立つので、m は何でもよいことになる

(※)の詳しい説明

直線 $x=k$ (y 軸に平行な直線) がすべての円 C_t に接する状況は、下図のような感じ。



円 C_t について、中心の x 座標 $2t$ と半径 $\frac{\sqrt{6}}{2}t$ は、t に関して、単調増加するので、

t を大きくすると右に動きながら、円が大きくなる。

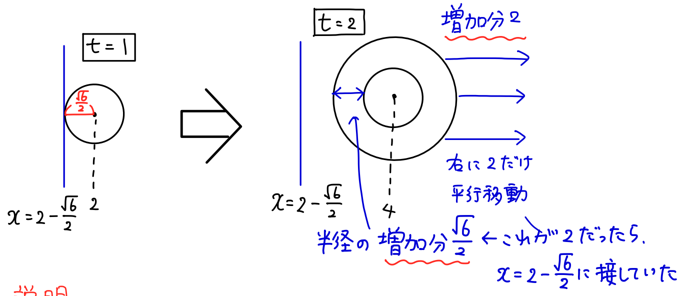
このとき、パターン(I)の場合が可能性としてあるが、

例えば、$t=1$ から $t=2$ にしたときの $2t$ と $\frac{\sqrt{6}}{2}t$ の増加分が異なるので、

$t=1$ のとき、$x=k$ と接していたとしても、$t=2$ のときでは離れてしまう。

t	$1 \longrightarrow 2$
$\frac{\sqrt{6}}{2}t$	$\frac{\sqrt{6}}{2} \longrightarrow \sqrt{6}$ 増加分 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

t	$1 \longrightarrow 2$
$2t$	$2 \longrightarrow 4$ 増加分2



(※ ※)の詳しい説明

両辺の係数比較をすると

$2(2m-1)^2=3(m^2+1)$, $\underbrace{(2m-1)(n+1)=0}_{①}$, $\underbrace{n+1=0}_{②}$

① $\Leftrightarrow$ $\underbrace{m=\frac{1}{2}}_{(i)}$ または $\underbrace{n=-1}_{(ii)}$, ② $\Leftrightarrow$ $n=-1$

(i) $m=\frac{1}{2}$ のとき、①かつ②が成り立つ条件は、$n=-1$ $(m=\frac{1}{2})$

(ii) $n=-1$ のとき、①かつ②が成り立つ条件は、$n=-1$ (m はすべての実数)

包含している (含まれている)

①かつ②が成り立つ条件は、(i)または(ii)より、$n=-1$