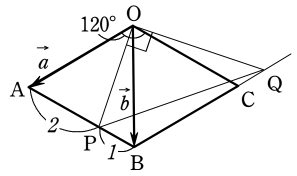
No.5　演習プリント　解答

名前（　　　　　　　　　　　　）

1．(1)　点 P は辺 AB を 2：1 に内分するから



$$\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\frac{{}^{\text{ア}}1}{{}^{\text{イ}}3}\vec{a}+\frac{{}^{\text{ウ}}2}{3}\vec{b}$$

ひし形の向かい合う辺は平行で長さが等しいから

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$$

よって　$\overrightarrow{OC}=\vec{b}-\vec{a}$

ゆえに　$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$

$$=(1-t)\vec{b}+t(\vec{b}-\vec{a})={}^{\text{エ}}-t\vec{a}+\vec{b}$$

OA＝AB，$\angle AOB=60^\circ$ であるから，三角形 OAB は正三角形である。

すなわち　$OB=|\vec{b}|=1$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB=1\times1\times\cos60^\circ=\dfrac{{}^{\text{オ}}1}{{}^{\text{カ}}2}$

$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}$ であるから　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}={}^{\text{キ}}0$

また　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)\cdot(-t\vec{a}+\vec{b})=-\dfrac{t}{3}|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\dfrac{2}{3}t\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{2}{3}|\vec{b}|^2$

$$=-\frac{t}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{2}{3}t\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}t+\frac{5}{6}$$

ゆえに　$-\dfrac{2}{3}t+\dfrac{5}{6}=0$　　よって　$t=\dfrac{{}^{\text{ク}}5}{{}^{\text{ケ}}4}$

$$|\overrightarrow{OP}|^2=\left|\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{9}=\frac{7}{9}$$

$|\overrightarrow{OP}|\geqq0$ であるから　$|\overrightarrow{OP}|=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{コ}}7}}{{}^{\text{サ}}3}$

$\overrightarrow{OQ}=-\dfrac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}$ であるから

$$|\overrightarrow{OQ}|^2=\left|-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\frac{25}{16}|\vec{a}|^2-\frac{5}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

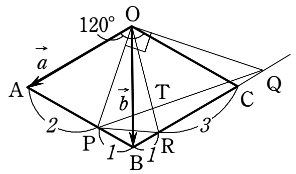
$$=\frac{25}{16}-\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}+1=\frac{21}{16}$$

$|\overrightarrow{OQ}|\geqq0$ であるから　$|\overrightarrow{OQ}|=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{シス}}21}}{{}^{\text{セ}}4}$

三角形 OPQ は $\angle POQ=90^\circ$ の直角三角形であるから，その面積 S_1 は

$$S_1=\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{OP}|\times|\overrightarrow{OQ}|=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{4}=\frac{{}^{\text{ソ}}7\sqrt{{}^{\text{タ}}3}}{{}^{\text{チツ}}24}$$

(2)　点 R は辺 BC を 1：3 に内分する点から



$$\overrightarrow{OR}=\frac{3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{1+3}=\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=-\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}$$

$\overrightarrow{OT}=r\overrightarrow{OR}$ より

$$\overrightarrow{OT}=r\left(-\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)=-\frac{r}{4}\vec{a}+r\vec{b}\quad\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{OT}=(1-s)\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OQ}$ より

$$\overrightarrow{OT}=(1-s)\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)+s\left(-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$=\frac{1}{12}(4-19s)\vec{a}+\frac{1}{3}(2+s)\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから，①，② より　$-\dfrac{r}{4}=\dfrac{1}{12}(4-19s)$，$r=\dfrac{1}{3}(2+s)$

これを解くと　$r=\dfrac{{}^{\text{テ}}7}{{}^{\text{ト}}9}$，$s=\dfrac{{}^{\text{ナ}}1}{{}^{\text{ニ}}3}$

よって　$\overrightarrow{OT}=\dfrac{{}^{\text{ヌネ}}-7}{{}^{\text{ノハ}}36}\vec{a}+\dfrac{{}^{\text{ヒ}}7}{{}^{\text{フ}}9}\vec{b}$

$r=\dfrac{7}{9}$ より　$\overrightarrow{OT}=\dfrac{7}{9}\overrightarrow{OR}$　　ゆえに　OT：TR＝7：2

$s=\dfrac{1}{3}$ より　$\overrightarrow{OT}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OP}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OQ}$　　ゆえに　PT：TQ＝1：2

三角形 PRT，三角形 OPT の面積をそれぞれ S_2，S_3 とする。

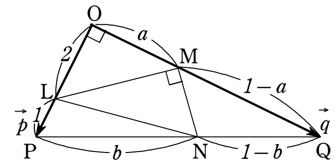
PQ：PT＝3：1 より　$S_1:S_3=3:1$

OT：TR＝7：2 より　$S_3:S_2=7:2$

よって　$S_2=\dfrac{2}{7}S_3=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{3}S_1=\dfrac{2}{21}S_1$

ゆえに　$S_1:S_2={}^{\text{ヘホ}}21:2$

2．(1)　$\overrightarrow{OL}=\dfrac{2}{3}\vec{p}$，$\overrightarrow{OM}=a\vec{q}$ であるから



$$\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OM}=\frac{{}^{\text{ア}}2}{{}^{\text{イ}}3}\vec{p}-{}^{\text{ウ}}a\vec{q}$$

また，$\angle POQ=90^\circ$ であるから　$\vec{p}\cdot\vec{q}=0$

よって　$|\overrightarrow{ML}|^2=\left|\dfrac{2}{3}\vec{p}-a\vec{q}\right|^2$

$$=\frac{4}{9}|\vec{p}|^2+a^2|\vec{q}|^2=\frac{4}{9}\cdot1^2+a^2\cdot2^2=\frac{4}{9}+4a^2$$

ゆえに　$|\overrightarrow{ML}|=\sqrt{\dfrac{4}{9}+4a^2}=\dfrac{{}^{\text{エ}}2}{{}^{\text{オ}}3}\sqrt{1+{}^{\text{カ}}9a^2}$

(2)　$\overrightarrow{ON}=(1-b)\vec{p}+b\vec{q}$ であるから

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(1-b)\vec{p}+b\vec{q}-a\vec{q}=(1-{}^{\text{キ}}b)\vec{p}+({}^{\text{ク}}b-{}^{\text{ケ}}a)\vec{q}$$

$\angle LMN=90^\circ$ であるから　$\overrightarrow{ML}\cdot\overrightarrow{MN}={}^{\text{コ}}0$

また　$\overrightarrow{ML}\cdot\overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{2}{3}\vec{p}-a\vec{q}\right)\cdot\{(1-b)\vec{p}+(b-a)\vec{q}\}$

$$=\frac{2}{3}(1-b)|\vec{p}|^2-a(b-a)|\vec{q}|^2$$

$$=\frac{2}{3}(1-b)-4a(b-a)$$

よって　$\dfrac{2}{3}(1-b)-4a(b-a)=0$　　b について解くと　$b=\dfrac{1+{}^{\text{サ}}6a^2}{{}^{\text{シ}}1+{}^{\text{ス}}6a}$　$\cdots\cdots①$

ゆえに　$\overrightarrow{MN}=\left(1-\dfrac{1+6a^2}{1+6a}\right)\vec{p}+\left(\dfrac{1+6a^2}{1+6a}-a\right)\vec{q}$

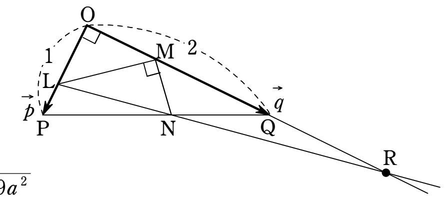
$$=\frac{6a(1-a)}{1+6a}\vec{p}+\frac{1-a}{1+6a}\vec{q}=\frac{1-a}{1+6a}(6a\vec{p}+\vec{q})$$

よって　$|\overrightarrow{MN}|^2=\left(\dfrac{1-a}{1+6a}\right)^2|6a\vec{p}+\vec{q}|^2=\left(\dfrac{1-a}{1+6a}\right)^2(36a^2|\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2)$

$$=\left(\frac{1-a}{1+6a}\right)^2(36a^2+4)=4\left(\frac{1-a}{1+6a}\right)^2(9a^2+1)$$

$0<a<1$ より $\dfrac{1-a}{1+6a}>0$ であるから　$|\overrightarrow{MN}|=\dfrac{{}^{\text{セ}}2({}^{\text{ソ}}1-a)}{1+6a}\sqrt{1+{}^{\text{タ}}9a^2}$

(3)　$\triangle LMN\backsim\triangle QOP$ であり，



OP：OQ＝1：2 であるから

$$|\overrightarrow{MN}|:|\overrightarrow{ML}|=1:2$$

よって　$|\overrightarrow{ML}|={}^{\text{チ}}2|\overrightarrow{MN}|$

ゆえに

$$\frac{2}{3}\sqrt{1+9a^2}=2\cdot\frac{2(1-a)}{1+6a}\sqrt{1+9a^2}$$

よって　$\dfrac{1}{3}=\dfrac{2(1-a)}{1+6a}$

両辺に $3(1+6a)$ を掛けて　$1+6a=6(1-a)$　　これを解くと　$a=\dfrac{{}^{\text{ツ}}5}{{}^{\text{テト}}12}$

これを ① に代入して　$b=\dfrac{1+6\cdot\left(\dfrac{5}{12}\right)^2}{1+6\cdot\dfrac{5}{12}}=\dfrac{{}^{\text{ナ}}7}{{}^{\text{ニヌ}}12}$

ゆえに，$\overrightarrow{ON}=\dfrac{5}{12}\vec{p}+\dfrac{7}{12}\vec{q}$ であるから

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LR}=\overrightarrow{OL}+s\overrightarrow{LN}=(1-s)\overrightarrow{OL}+s\overrightarrow{ON}$$

$$=\frac{2}{3}(1-s)\vec{p}+s\left(\frac{5}{12}\vec{p}+\frac{7}{12}\vec{q}\right)$$

$$=\left(\frac{{}^{\text{ネ}}2}{{}^{\text{ノ}}3}-\frac{s}{{}^{\text{ハ}}4}\right)\vec{p}+\frac{7}{12}s\vec{q}$$

$\vec{p}\neq\vec{0}$，$\vec{q}\neq\vec{0}$ であり，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ は平行でないから，点 R が直線 OQ 上の点であるとき

$\dfrac{2}{3}-\dfrac{s}{4}=0$　　よって　$s=\dfrac{{}^{\text{ヒ}}8}{{}^{\text{フ}}3}$