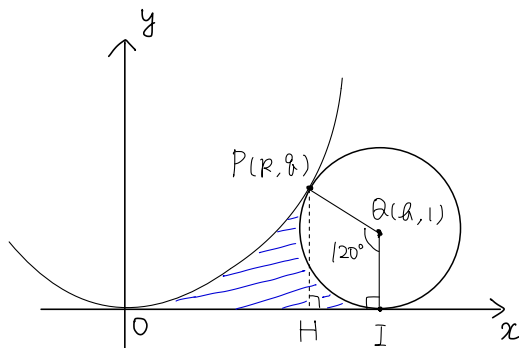


S③ 15番(2)の解答

- 15 放物線 $y = ax^2$ ($a > 0$) と円 $(x-b)^2 + (y-1)^2 = 1$ ($b > 0$) が、点 $P(p, q)$ で接しているとする。ただし、 $0 < p < b$ とする。この円の中心 Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を R としたとき、 $\angle PQR = 120^\circ$ であるとする。ここで、放物線と円が点 P で接するとは、 P が放物線と円の共有点であり、かつ点 P における放物線の接線と点 P における円の接線が一致することである。
- (1) a, b の値を求めよ。
- (2) 点 P と点 R を結ぶ短い方の弧と x 軸、および放物線で囲まれた部分の面積を求めよ。



$$(1) \quad p = \sqrt{3}, \quad q = \frac{3}{2} \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(2) (1) より、

$$f(x) = \frac{x^2}{2}, \quad P\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right), \quad Q\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1\right) \text{ である.}$$

$H(\sqrt{3}, 0)$, $I\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ とし、求める面積を S とすると、

$$S = \left(\text{図1} + \text{図2} - \text{図3} \right) \text{ より.}$$

$$S = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2} x^2 dx + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \right) - \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{1}{6} x^3 \right]_0^{\sqrt{3}} + \frac{5\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{3}$$