マーク演習　No.7　解答

1．(1)　$x^2+2ax+3a^2+3a+12=(x+a)^2+2a^2+3a+12$ であるから，頂点の座標は

$(-a,\ 2a^2+3a+12)$　　$x=-a,\ y=2a^2+3a+12$ とおいて，a を消去すると

$y={}^{\text{ア}}2x^2-{}^{\text{イ}}3x+{}^{\text{ウエ}}12$

(2)　$x^2+2ax+3a^2+3a+12=-x^2-10x$ すなわち $2x^2+2(a+5)x+3a^2+3a+12=0$

の判別式 D について，$D>0$ が求める条件．

よって　$D/4=(a+5)^2-2(3a^2+3a+12)>0$ から　$5a^2-4a-1<0$

ゆえに　$(5a+1)(a-1)<0$　　よって　$-\dfrac{{}^{\text{オ}}1}{{}^{\text{カ}}5}<a<{}^{\text{キ}}1$

また，1 点を共有する条件は　$D=0$　　よって　$a={}^{\text{ク}}1$ または $a=-\dfrac{{}^{\text{ケ}}1}{{}^{\text{コ}}5}$

$a=1$ のとき，接点の x 座標は　$-\dfrac{1+5}{2}=-3$

また　$y=-x^2-10x$ より　$y'=-2x-10$ であるから，接線の方程式は

$y=\{-2(-3)-10\}(x+3)-(-3)^2-10(-3)$

ゆえに　$y=-{}^{\text{サ}}4x+{}^{\text{シ}}9$

(3)　$x^2+12=-x^2-10x$ とすると　$x^2+5x+6=0$ から　$(x+3)(x+2)=0$

ゆえに　$x={}^{\text{スセ}}-2,\ {}^{\text{ソタ}}-3$

面積は　$\displaystyle\int_{-3}^{-2}\{(-x^2-10x)-(x^2+12)\}dx=-2\int_{-3}^{-2}(x+3)(x+2)dx$

$$=\frac{2\{-2-(-3)\}^3}{6}=\frac{{}^{\text{チ}}1}{{}^{\text{ツ}}3}$$

2．$y=ax^2+2-12a$ から　$a(x^2-12)+2-y=0$

よって　$x^2-12=0,\ 2-y=0$ から　$x=\pm2\sqrt{3},\ y=2$

ゆえに，定点 $(\pm{}^{\text{ア}}2\sqrt{{}^{\text{イ}}3},\ {}^{\text{ウ}}2)$ を通る．

①, ② から　x^2 を消去すると　$y=a(16-y^2)+2-12a$

ゆえに　$ay^2+y-(4a+2)=0$

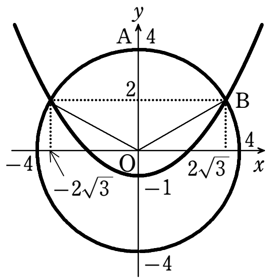
よって　$(ay+2a+1)(y-2)=0$ から　$y=-\dfrac{2a+1}{a},\ 2$

ここで　$-\dfrac{2a+1}{a}=-2-\dfrac{1}{a}<-4$

② より　$-4\leqq y\leqq4$ であるから，これは不適．ゆえに　$y={}^{\text{エ}}2$

よって，放物線 ① と円 ② の交点の x 座標は　$x^2+2^2=16$ から　$x=\pm2\sqrt{3}$

また，$a=\dfrac{1}{4}$ のとき，① は $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$



ゆえに，A $(0,\ 4)$, B $(2\sqrt{3},\ 2)$ とすると

$\angle$ AOB$=60°$, OB：$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ であることと，

図形の対称性から，求める面積は

$$2\cdot\pi\cdot4^2\cdot\frac{1}{6}+2\int_0^{2\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}x-\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)\right\}dx$$

$$=\frac{16}{3}\pi+2\left[-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2\sqrt{3}}+x\right]_0^{2\sqrt{3}}$$

$$={}^{\text{オ}}4\sqrt{{}^{\text{カ}}3}+\frac{{}^{\text{キク}}16}{{}^{\text{ケ}}3}\pi$$