1．点 O を原点とする座標空間に 4 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 1)$，C$(1,\ 0,\ 1)$，D$(-2,\ -1,\ -2)$ がある。
$0<a<1$ とし，線分 AB を $a:(1-a)$ に内分する点を E，線分 CD を $a:(1-a)$ に内分する点を F とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ は a を用いて $\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\left(\boxed{\text{アイ}}\,a,\ \boxed{\text{ウエ}}\,a,\ \boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}\,a\right)$ と表される。

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるのは $a=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のときである。

(2)　$a=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ とする。$0<b<1$ として，線分 EF を $b:(1-b)$ に内分する点を G とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は b を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\left(\frac{\boxed{\text{ケ}}-\boxed{\text{コ}}\,b}{\boxed{\text{サ}}},\ \frac{\boxed{\text{シ}}-\boxed{\text{ス}}\,b}{\boxed{\text{サ}}},\ \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)$$

と表される。

(3)　(2) において，直線 OG と直線 BC が交わるときの b の値と，その交点 H の座標を求めよう。

点 H は直線 BC 上にあるから，実数 s を用いて $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=s\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と表される。また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と表される。よって

$$b=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}},\quad s=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}},\quad t=\boxed{\text{テ}}$$

である。したがって，点 H の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ナ}}},\ \boxed{\text{ネ}}\right)$ である。

また，点 H は線分 BC を $\boxed{\text{ノ}}:1$ に外分する。

2．座標空間において，立方体 OABC－DEFG の頂点を

O(0, 0, 0)，A(3, 0, 0)，B(3, 3, 0)，C(0, 3, 0)，

D(0, 0, 3)，E(3, 0, 3)，F(3, 3, 3)，G(0, 3, 3)

とし，OD を 2：1 に内分する点を K，OA を 1：2 に内分する点を L とする。BF 上の点 M，FG 上の点 N および K，L の 4 点は同一平面上にあり，四角形 KLMN は平行四辺形であるとする。

(1) 四角形 KLMN の面積を求めよう。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{LK}}$ を成分で表すと

$\overrightarrow{\mathrm{LK}}=\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$ となり，四角形 KLMN が平行四辺形であることにより，

$\overrightarrow{\mathrm{LK}}=\boxed{\text{オ}}$ である。$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～③ のうちから一つ選べ。

⓪ $\overrightarrow{\mathrm{ML}}$　① $\overrightarrow{\mathrm{LM}}$　② $\overrightarrow{\mathrm{NM}}$　③ $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$

ここで，M(3, 3, s)，N(t, 3, 3) と表すと，$\overrightarrow{\mathrm{LK}}=\boxed{\text{オ}}$ であるので，$s=\boxed{\text{カ}}$，$t=\boxed{\text{キ}}$ となり，

N は FG を 1：$\boxed{\text{ク}}$ に内分することがわかる。また，$\overrightarrow{\mathrm{LK}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{LM}}$ について $\overrightarrow{\mathrm{LK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LM}}=\boxed{\text{ケ}}$，

$|\overrightarrow{\mathrm{LK}}|=\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{LM}}|=\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}$ となるので，四角形 KLMN の面積は $\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$ である。

(2) 四角形 KLMN を含む平面を α とし，点 O を通り平面 α と垂直に交わる直線を ℓ，α と ℓ の交点を P とする。

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と三角錐 OLMN の体積を求めよう。P(p, q, r) とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{LK}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{LM}}$ と垂直であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LK}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LM}}=\boxed{\text{ソ}}$ となるので，$p=\boxed{\text{タ}}\,r$，$q=\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\,r$ であることがわかる。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PL}}$ が垂直であることにより，$r=\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ となり，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ を求めると $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ である。

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ は三角形 LMN を底面とする三角錐 OLMN の高さであるから，三角錐 OLMN の体積は $\boxed{\text{フ}}$ である。