マーク演習　No.5　解答

1．真数は正であるから　$x-2>0$，$x-3>0$，$x+1>0$

共通範囲を求めて　$x>3$　……①

$f(x)=0$ から　$\log_3(x-2)+\log_3(x-3)-\log_3(x+1)=0$

よって　$\log_3(x-2)+\log_3(x-3)=\log_3(x+1)$

ゆえに　$\log_3(x-2)(x-3)=\log_3(x+1)$

よって　$(x-2)(x-3)=x+1$

整理して　$x^2-{}^{ア}6x+{}^{イ}5=0$

したがって　$(x-1)(x-5)=0$

ゆえに，① から　$x={}^{ウ}5$

また，$f(x)\leqq 0$ とすると　$1\leqq x\leqq 5$　……②

①，② の共通範囲を求めて　${}^{エ}3<x\leqq{}^{オ}5$

2．$f(x)=x^3-\dfrac{4}{3}x$ から　$f'(x)=3x^2-\dfrac{4}{3}$

よって，点 A における接線の方程式は　$y-\left(a^3-\dfrac{4}{3}a\right)=\left(3a^2-\dfrac{4}{3}\right)(x-a)$

すなわち　$y=\left({}^{ア}3{}^{イ}a^2-\dfrac{{}^{ウ}4}{{}^{エ}3}\right)x-{}^{オ}2{}^{カ}a^{{}^{キ}3}$

これが点 B を通るから　$b^3-\dfrac{4}{3}b=\left(3a^2-\dfrac{4}{3}\right)b-2a^3$

ゆえに　$b^3-3a^2b+2a^3=0$

因数分解して　$(b-a)^2(b+2a)=0$

$a\fallingdotseq b$ であるから　$b={}^{クケ}-2a$　……①

点 B における接線と点 A における接線が直交するから

$$\left(3a^2-\frac{4}{3}\right)\left(3b^2-\frac{4}{3}\right)=-1$$

① を代入して整理すると　$36a^4-20a^2+\dfrac{25}{9}=0$

よって　$\left(6a^2-\dfrac{5}{3}\right)^2=0$　　ゆえに　$a^2=\dfrac{{}^{コ}5}{{}^{サシ}18}$

3．直線 l の方程式は　$y-1=a(x-1)$

すなわち　$y={}^{ア}ax-{}^{イ}a+{}^{ウ}1$

直線 l と放物線 C の交点の x 座標は $x^2=ax-a+1$ の解である．

$x^2=ax-a+1$ から　$x^2-ax+a-1=0$

よって　$(x-1)\{x-(a-1)\}=0$

ゆえに，交点の x 座標は　$x=1$，${}^{エ}a-{}^{オ}1$

$a-1<0$ のとき

$$S=\int_{a-1}^{0}(ax-a+1-x^2)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2-(a-1)x\right]_{a-1}^{0}$$

$$=\frac{1}{3}(a-1)^3-\frac{a}{2}(a-1)^2+(a-1)^2$$

$$=\frac{(a-1)^2}{6}\{2(a-1)-3a+6\}=\frac{(a-1)^{{}^{カ}2}({}^{キ}4-{}^{ク}a)}{{}^{ケ}6}$$