1．$f(x)=x^3-3a^2x+a^3$ から　　$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-a,\ a$

$a>0$ であるから　　$-a<a$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$3a^3$	$\searrow$	$-a^3$	$\nearrow$

よって，関数 $y=f(x)$ は

$x={}^{\text{アイ}}-a$ で極大値 ${}^{\text{ウ}}3a^{{}^{\text{エ}}3}$ をとり，

$x={}^{\text{オ}}a$ で極小値 ${}^{\text{カ}}-a^{{}^{\text{キ}}3}$ をとる。

原点を通る放物線 $y=px^2+qx$（p，q は定数かつ $p\neq0$）が 2 点 $(-a,\ 3a^3)$，$(a,\ -a^3)$ を通るとき

$$pa^2-qa=3a^3 \quad \cdots\cdots ①,\quad pa^2+qa=-a^3 \quad \cdots\cdots ②$$

①＋② から　　$2pa^2=2a^3$

$a>0$ であるから　　$p=a$

②－① から　　$2qa=-4a^3$

$a>0$ であるから　　$q=-2a^2$

よって，放物線 C の方程式は　$y={}^{\text{ク}}ax^2-{}^{\text{ケ}}2a^{{}^{\text{コ}}2}x$

$y=ax^2-2a^2x$ から　　$y'=2ax-2a^2$

ゆえに，原点における C の接線 ℓ の方程式は

$$y={}^{\text{サシ}}-2a^{{}^{\text{ス}}2}x$$

また，原点を通り ℓ に垂直な直線 m の方程式は

$$y=\frac{1}{{}^{\text{セ}}2a^{{}^{\text{ソ}}2}}x$$

x 軸に関して放物線 C と対称な放物線 D の方程式は

$$-y=ax^2-2a^2x$$

すなわち　$y=-ax^2+2a^2x$

D：$y=-ax^2+2a^2x$ と ℓ：$y=-2a^2x$ から y を消去して

$$-ax^2+2a^2x=-2a^2x$$

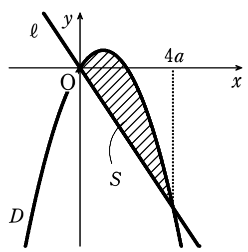
整理すると

$$ax(x-4a)=0$$

よって　　$x=0,\ 4a$

放物線 D と直線 ℓ の交点の x 座標は　　$0,\ 4a$

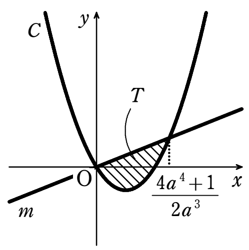
放物線 D と直線 ℓ で囲まれた図形の面積 S は



$$S=\int_0^{4a}\{(-ax^2+2a^2x)-(-2a^2x)\}dx$$

$$=-a\int_0^{4a}x(x-4a)dx=\frac{a}{6}\cdot(4a-0)^3$$

$$=\frac{{}^{\text{タチ}}32}{{}^{\text{ツ}}3}a^{{}^{\text{テ}}4}$$



C：$y=ax^2-2a^2x$ と m：$y=\dfrac{1}{2a^2}x$ から y を消去して　$ax^2-2a^2x=\dfrac{1}{2a^2}x$

整理すると

$$x\left(ax-\frac{4a^4+1}{2a^2}\right)=0$$

よって　　$x=0,\ \dfrac{4a^4+1}{2a^3}$

放物線 C と直線 m の交点の x 座標は　$0,\ \dfrac{4a^{{}^{\text{ト}}4}+1}{2a^{{}^{\text{ナ}}3}}$

放物線 C と直線 m で囲まれた図形の面積 T は

$$T=\int_0^{\frac{4a^4+1}{2a^3}}\left\{\frac{1}{2a^2}x-(ax^2-2a^2x)\right\}dx$$

$$=-a\int_0^{\frac{4a^4+1}{2a^3}}x\left(x-\frac{4a^4+1}{2a^3}\right)dx=\frac{a}{6}\cdot\left(\frac{4a^4+1}{2a^3}\right)^3$$

$S=T$ であるとき　　$\dfrac{a}{6}\cdot(4a)^3=\dfrac{a}{6}\cdot\left(\dfrac{4a^4+1}{2a^3}\right)^3$

a は正の実数であるから　　$4a=\dfrac{4a^4+1}{2a^3}$

すなわち　$8a^4=4a^4+1$

ゆえに　　$a^4=\dfrac{{}^{\text{ニ}}1}{{}^{\text{ヌ}}4}$

このとき　$S=\dfrac{32}{3}a^4=\dfrac{32}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{{}^{\text{ネ}}8}{{}^{\text{ノ}}3}$

参考　$S=T$ となるための条件は，原点以外の，D と ℓ の交点の x 座標と，C と m の交点の x 座標が等しくなることである。

2．(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}$ より　　$9=2\times6\times\cos\angle\mathrm{AOB}$

よって　　$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{{}^{\text{ア}}3}{{}^{\text{イ}}4}$

$\sin^2\angle\mathrm{AOB}=1-\cos^2\angle\mathrm{AOB}$ より　　$\sin^2\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{7}{16}$

$0^\circ<\angle\mathrm{AOB}<180^\circ$ より，$\sin\angle\mathrm{AOB}>0$ であるから　　$\sin\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{ウ}}7}}{{}^{\text{エ}}4}$

したがって，三角形 AOB の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot6\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{{}^{\text{オ}}3\sqrt{{}^{\text{カ}}7}}{{}^{\text{キ}}2}$$

(2)　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{BOC}=6\times2x\times\dfrac{3}{4}={}^{\text{ク}}9x$

よって　　$\vec{c}\cdot\vec{n}=\vec{c}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})$

$$=s\vec{a}\cdot\vec{c}+t\vec{b}\cdot\vec{c}-|\vec{c}|^2$$

$$={}^{\text{ケ}}4s+{}^{\text{コ}}9tx-{}^{\text{サ}}4x^2 \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，$\vec{a}\perp\vec{n}$，$\vec{b}\perp\vec{n}$ であるとき　　$\vec{a}\cdot\vec{n}={}^{\text{シ}}0$，$\vec{b}\cdot\vec{n}={}^{\text{ス}}0$　$\cdots\cdots$ ①

したがって，① より

$$4s+9t-4=0 \quad \cdots\cdots ③,\quad 9(s+4t-x)=0 \quad \cdots\cdots ④$$

③，④ を s，t の連立方程式とみて解くと

$$s=-\frac{1}{{}^{\text{セ}}7}({}^{\text{ソ}}9x-{}^{\text{タチ}}16),\quad t=\frac{{}^{\text{ツ}}4}{7}(x-1) \quad \cdots\cdots ⑤$$

したがって，$|\vec{n}|^2=(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{n}$ と ②，①，⑤ より

$$|\vec{n}|^2=s\vec{a}\cdot\vec{n}+t\vec{b}\cdot\vec{n}-\vec{c}\cdot\vec{n}$$

$$=-(4s+9tx-4x^2)$$

$$=4x^2-\frac{36}{7}x(x-1)+\frac{4}{7}(9x-16)$$

$$=-\frac{{}^{\text{テ}}8}{7}(x^2-{}^{\text{ト}}9x+{}^{\text{ナ}}8)$$

$$=-\frac{8}{7}\left(x-\frac{{}^{\text{ニ}}9}{{}^{\text{ヌ}}2}\right)^2+{}^{\text{ネノ}}14$$

$1<\dfrac{9}{2}<8$ であるから，$x=\dfrac{9}{2}$ のとき，$|\vec{n}|$ は最大となり，四面体 OABC の体積は最大となる。