No.3　演習プリント　　　　　　　　　　　　名前（　　　　　　　　　　）

1．a を正の実数として，x の関数 $f(x)$ を $f(x)=x^3-3a^2x+a^3$ とする。

関数 $y=f(x)$ は，$x=\boxed{アイ}$ で極大値 $\boxed{ウ}\,a^{\boxed{エ}}$ をとり，$x=\boxed{オ}$ で極小値 $\boxed{カ}\,a^{\boxed{キ}}$ をとる。このとき，

2点 $\left(\boxed{アイ},\ \boxed{ウ}\,a^{\boxed{エ}}\right)$，$\left(\boxed{オ},\ \boxed{カ}\,a^{\boxed{キ}}\right)$ と原点を通る放物線 $y=\boxed{ク}\,x^2-\boxed{ケ}\,a^{\boxed{コ}}x$ を C とする。

原点における C の接線 ℓ の方程式は $y=\boxed{サシ}\,a^{\boxed{ス}}x$ である。また，原点を通り ℓ に垂直な直線 m の方程式は

$y=\dfrac{1}{\boxed{セ}\,a^{\boxed{ソ}}}x$ である。

x 軸に関して放物線 C と対称な放物線 $y=-\boxed{ク}\,x^2+\boxed{ケ}\,a^{\boxed{コ}}x$ を D とする。

D と ℓ で囲まれた図形の面積 S は $S=\dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツ}}a^{\boxed{テ}}$ である。放物線 C と直線 m の交点の x 座標は，

0 と $\dfrac{4a^{\boxed{ト}}+1}{2a^{\boxed{ナ}}}$ である。C と m で囲まれた図形の面積を T とする。$S=T$ となるのは $a^{\boxed{テ}}=\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ のときであり，

このとき，$S=\dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$ である。

２．四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=6$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=9$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=4$，$\cos\angle BOC=\dfrac{3}{4}$ であるとする。

(1)　$\cos\angle AOB=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，$\sin\angle AOB=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

また，三角形OABの面積は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(2)　x を $1<x<8$ を満たす実数とし，$|\vec{c}|=2x$ であるとする。このとき，四面体OABCの体積が最大となる x の値を求めよう。まず，三角形OABの面積は x の値によらず一定であるので，四面体OABCの体積が最大となるためには三角形OABを底面としたときの四面体OABCの高さが最大になればよいことに注意しよう。

実数 s，t に対して，$\overrightarrow{OD}=s\vec{a}+t\vec{b}$ となるように点Dをとり，$\overrightarrow{CD}=\vec{n}$ とおく。

$\vec{n}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{ク}}x$ であるので，$\vec{a}\cdot\vec{n}=4s+9t-4$，$\vec{b}\cdot\vec{n}=9(s+4t-x)$，

$\vec{c}\cdot\vec{n}=\boxed{\text{ケ}}s+\boxed{\text{コ}}tx-\boxed{\text{サ}}x^2$ となる。

以下では，$|\vec{n}|$ が，三角形OABを底面としたときの四面体OABCの高さとなるように，$\vec{a}\perp\vec{n}$，$\vec{b}\perp\vec{n}$ とする。

このとき

$$\vec{a}\cdot\vec{n}=\boxed{\text{シ}},\quad \vec{b}\cdot\vec{n}=\boxed{\text{ス}}\quad\cdots\cdots①$$

である。①により，s，t は x を用いて

$$s=-\frac{1}{\boxed{\text{セ}}}\left(\boxed{\text{ソ}}x-\boxed{\text{タチ}}\right),\quad t=\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{セ}}}(x-1)$$

と表される。さらに，$|\vec{n}|^2=(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{n}$ と①に注意して，$|\vec{n}|^2$ を x を用いて表すと

$$|\vec{n}|^2=-\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(x^2-\boxed{\text{ト}}x+\boxed{\text{ナ}}\right)=-\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(x-\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\right)^2+\boxed{\text{ネノ}}$$

となる。$1<\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}<8$ であるので，$x=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ のとき，$|\vec{n}|$ は最大となり，四面体OABCの体積は最大となる。