数学ⅠAⅡB③　Sクラス　補足プリント

23　$\vec{a}=(3,4)$, $\vec{b}=(-1,7)$

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=\underline{5}$ (ア)

$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+7^2}=5\sqrt{2}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3+28=25$

$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角をθとすると

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{25}{5\cdot5\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta\leqq180^\circ$より、$\underline{\theta=45^\circ}$ (イ)

$t\vec{a}+\vec{b}=t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3t-1\\4t+7\end{pmatrix}$ より.

$|t\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(3t-1)^2+(4t+7)^2}$

$=\sqrt{25t^2+50t+50}$

$=5\sqrt{t^2+2t+2}$

$=5\sqrt{(t+1)^2+1}$

よって、$|t\vec{a}+\vec{b}|$は

$\underline{t=-1}$ (ウ) のとき、$\underline{最小値5}$ (エ)

(2) $\vec{c}=(x,y)$とすると

$\vec{c}\neq2\vec{a}$より、$(x,y)\neq(6,8)$

$|\vec{c}|=2\times5=10$より、$|\vec{c}|^2=100$

$\therefore\ x^2+y^2=100$ …①

$\vec{b}$と$\vec{c}$のなす角が45°のとき

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos45^\circ$

$-x+7y=5\cancel{\sqrt{2}}\cdot10\cdot\dfrac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}$

$\therefore\ x=7y-50$ …②

①, ②より、

$(7y-50)^2+y^2=100$

$y^2-14y+48=0$

$(y-6)(y-8)=0$

$y\neq8$より、$y=6$

②より、$x=-8$

よって、$\underline{\vec{c}=(-8,6)}$ (オ)

(3) $\vec{a}-\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\-2\end{pmatrix}$

$\vec{b}-\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$

よって

$(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=77-2=\underline{75}$ (カ)

$\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}=(11,-2)$

$\overrightarrow{CB}=\vec{b}-\vec{c}=(7,1)$

$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{11^2+(-2)^2}=5\sqrt{5}$

$|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{7^2+1^2}=5\sqrt{2}$

したがって

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2|\overrightarrow{CB}|^2-(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{125\cdot50-75^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{25^2(5\cdot2-3^2)}$

$=\underline{\dfrac{25}{2}}$ (キ)