マーク演習　No.6　解答

1．(1)　直線 PQ の方程式は $y=\dfrac{9-0}{15-12}(x-12)+0$ すなわち $y={}^{ア}3x-{}^{イウ}36$

線分 PQ の中点の座標は $\left(\dfrac{27}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$ であるから，線分 PQ の垂直二等分線の方程式は

$$y=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{27}{2}\right)+\frac{9}{2} \quad \text{すなわち} \quad y=\frac{{}^{エオ}-1}{{}^{カ}3}x+{}^{キ}9$$

(2)　直線 PR の傾きは $\dfrac{8-0}{8-12}=-2$　　線分 PR の中点の座標は $(10, 4)$

ゆえに，線分 PR の垂直二等分線の方程式は $y=\dfrac{1}{2}(x-10)+4$ すなわち $y=\dfrac{1}{2}x-1$

である．

よって $-\dfrac{1}{3}x+9=\dfrac{1}{2}x-1$ とおくと　$x=12$

このとき　$y=5$　　ゆえに，円 C の中心の座標は　$({}^{クケ}12, {}^{コ}5)$

半径は，中心と点 P との距離で　$\sqrt{(12-12)^2+(0-5)^2}={}^{サ}5$

(3)　円の中心 $(12, 5)$ と直線 $ax-y=0$ との距離が 5 未満であればよいから

$$\frac{|12a-5|}{\sqrt{a^2+1}}<5 \quad \text{すなわち} \quad |12a-5|<5\sqrt{a^2+1}$$

両辺とも負でないから，両辺を平方すると　$144a^2-120a+25<25a^2+25$

ゆえに　$a(119a-120)<0$　　よって　${}^{シ}0<a<\dfrac{{}^{スセソ}120}{{}^{タチツ}119}$

2．(1)　$y=9^b$ であるから　$\log_3 y=\log_3 9^b=b\log_3 9={}^{ア}2b$

(2)　$x^2y=\dfrac{1}{3}$ から　$2\log_3 x+\log_3 y=\log_3\dfrac{1}{3}$

よって，(1) から　$2a+2b=-1$　　ゆえに　$a+b=\dfrac{{}^{イウ}-1}{{}^{エ}2}$

(3)　$a+2b=3$ から　$\log_3 x+\log_3 y=3$

よって　$\log_3 xy=3$　　ゆえに　$xy=27$

$x>0, y>0$ であるから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均) により　$x+y\geqq 2\sqrt{xy}=6\sqrt{3}$

等号は $x=y=3\sqrt{3}$ $\left(a=\dfrac{3}{2}, b=\dfrac{3}{4}\right)$ のとき成り立つ．

よって，$x+y$ の最小値は　${}^{オ}6\sqrt{{}^{カ}3}$

(4)　$x>1, y>1$ から　$a>0, b>0$

また　$xy=3^a\times 3^{2b}=3^{a+2b}$

$a>0, b>0$ であるから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均) により　$a+2b\geqq 2\sqrt{2ab}=4$

等号は $a=2b$ かつ $ab=2$ かつ $a>0, b>0$ すなわち $a=2, b=1$ のとき成り立つ．

よって，xy の最小値は　$3^4={}^{キク}81$