数列

1 ●数列とは

◎ 数列

正の奇数を小さいものから順に並べると

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \cdots\cdots$ …… ①

という数の列が得られる。また，36 の正の約数を小さいものから順に並べると，次のような数の列が得られる。

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36$ …… ②

このように数を一列に並べたものを **数列** といい，数列を作っている各数を数列の **項** という。数列の項は，最初の項から順に第 1 項，第 2 項，第 3 項，…… といい，n 番目の項を **第 n 項** という。特に，第 1 項を **初項** ともいう。数列 ① の初項は 1，第 2 項は 3 である。

数列 ② のように，項の個数が有限である数列を **有限数列** といい，有限数列においては，項の個数を **項数**，最後の項を **末項** という。例えば，有限数列 ② の項数は 9，末項は 36 である。

数列を一般的に表すには，次のように書く。

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$

また，この数列を，$\{a_n\}$ と略記することがある。

例えば，数列 ① を $\{a_n\}$ とすると，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=5$，…… であり，一般に，第 n 項 a_n は次のように表すことができる。

$$a_n=2n-1$$

この例のように，数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n が n の式で表されるとき，これを数列 $\{a_n\}$ の **一般項** という。一般項が与えられると，n に 1，2，3，…… を代入することにより，その数列の各項を求めることができる。

また，数列 ① は，その一般項を用いて，$\{2n-1\}$ と表すこともある。

例 1 一般項が $a_n=4n-3$ である数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 5 項までを求めると，次のようになる。

$a_1=4\cdot1-3=1$, $\quad a_2=4\cdot2-3=5$, $\quad a_3=4\cdot3-3=9$

$a_4=4\cdot4-3=13$, $\quad a_5=4\cdot5-3=17$

例 2 (1) 数列 $\quad 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \cdots\cdots$

では，初項が 1^2，第 2 項が 2^2，第 3 項が 3^2，…… のように，第 n 項が n^2 になっていると推測できる。

よって，一般項は $\quad n^2$

(2) 数列 $\quad \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{4},\ \dfrac{3}{8},\ \dfrac{4}{16},\ \dfrac{5}{32},\ \cdots\cdots$

では，第 n 項の分子は n，分母は 2 の累乗 2^1，2^2，2^3，2^4，2^5，……，すなわち 2^n になっていると推測できる。

よって，一般項は $\quad \dfrac{n}{2^n}$

2 ●等差数列の一般項

◎ 等差数列

数列 $\quad 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ \cdots\cdots$

は，初項 5 に次々に 3 を加えて得られる。すなわち，1 つの項とそのすぐ前の項との差は常に 3 で，一定である。

一般に，数列 $\quad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$

において，各項に一定の数 d を加えると，次の項が得られるとき，この数列を **等差数列** といい，d をその **公差** という。

初項が a，公差が d である等差数列 $\{a_n\}$ の各項は，順に

$a_1=a$

$a_2=a_1+d=a+d$

$a_3=a_2+d=a+2d$

$a_4=a_3+d=a+3d$

………

$$\underbrace{a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4 \ \cdots\cdots\ a_{n-1} \xrightarrow{+d} a_n}_{(n-1)\text{ 個}}$$

と表されるから，一般に次のことが成り立つ。

> **等差数列の一般項**
>
> 初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は
>
> $$a_n=a+(n-1)d$$

例 3 初項 3，公差 5 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=3+(n-1)\cdot5$ $\quad$ すなわち $\quad a_n=5n-2$

例えば，第 20 項は $\quad a_{20}=5\cdot20-2=98$ 終

例題 1 第 5 項が -5，第 10 項が 15 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の一般項を求めよ。

> **解** この数列の初項を a，公差を d とすると $\quad a_n=a+(n-1)d$
>
> 第 5 項が -5 であるから $\quad a+4d=-5$ …… ①
>
> 第 10 項が 15 であるから $\quad a+9d=15$ …… ②
>
> ①，② を解いて $\quad a=-21$，$d=4$
>
> よって，一般項は $\quad a_n=-21+(n-1)\cdot4=4n-25$

3 等差数列の和

初項 1，公差 2，項数 10 の等差数列の和 S を求めてみよう。

$$\begin{array}{rrl} & S= & 1+3+5+\cdots\cdots+15+17+19 \\ +) & S= & 19+17+15+\cdots\cdots+5+3+1 \\ \hline & 2S= & \underbrace{20+20+20+\cdots\cdots+20+20+20}_{10\text{ 個}} \end{array}$$

よって $\quad S=\dfrac{1}{2}(20\times10)=100$

一般に，初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の末項を l とし，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-d)+l$ …… ①

また，この数列の項を逆の順に並べると

$S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+d)+a$ …… ②

上の S の場合と同様に，① と ② の各辺を加えると

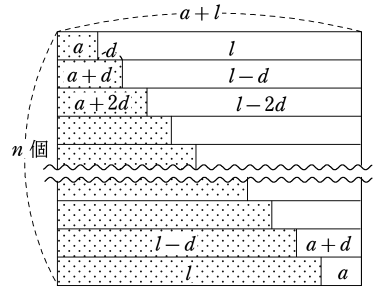
$2S_n=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l)$

右辺は，$a+l$ を n 個加えたものであるから

$2S_n=n(a+l)$

よって

$S_n=\dfrac{1}{2}n(a+l)$ …… ③



また，l は第 n 項であるから

$l=a+(n-1)d$

これを ③ に代入して

$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

したがって，次の公式が成り立つ。

> **等差数列の和**
>
> 初項 a，公差 d，末項 l，項数 n の等差数列の和を S_n とすると
>
> $$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

例 4 (1) 初項 3，末項 27，項数 13 の等差数列の和は

$\dfrac{1}{2}\cdot13(3+27)=195$

(2) 初項 50，公差 -4，項数 20 の等差数列の和は

$\dfrac{1}{2}\cdot20\{2\cdot50+(20-1)\cdot(-4)\}=240$ 終

例題 3 次の等差数列の和 S を求めよ。

$100,\ 105,\ 110,\ \cdots\cdots,\ 200$

> **解** この等差数列の初項は 100，公差は 5 であるから，末項 200 が第 n 項であるとすると
>
> $100+(n-1)\cdot5=200$
>
> すなわち $\quad 5n+95=200$
>
> ゆえに $\quad n=21$
>
> よって，初項 100，末項 200，項数 21 の等差数列の和を求めて
>
> $$S=\frac{1}{2}\cdot21(100+200)=3150$$

4 ● 等比数列の一般項

◎ 等比数列

数列　　　$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ \cdots\cdots$

は，初項 3 に次々に 2 を掛けて得られる。すなわち，隣り合う 2 つの項の比は常に一定である。

一般に，数列　　$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$

において，各項に一定の数 r を掛けると，次の項が得られるとき，この数列を **等比数列** といい，r をその **公比** という。

初項が a，公比が r である等比数列 $\{a_n\}$ の各項は，順に

$$a_1=a$$
$$a_2=a_1r=ar$$
$$a_3=a_2r=ar^2$$
$$a_4=a_3r=ar^3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\underbrace{a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3 \xrightarrow{\times r} a_4 \ \cdots\cdots\ a_{n-1} \xrightarrow{\times r} a_n}_{(n-1)\text{個}}$$

と表されるから，一般に次のことが成り立つ。

> **等比数列の一般項**
> 初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は
> $$a_n=ar^{n-1}$$

例 5　初項 2，公比 3 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=2\cdot 3^{n-1}$$

例えば，第 8 項は　　$a_8=2\cdot 3^7=4374$　　終

例題 5　第 4 項が -24，第 6 項が -96 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解　この数列の初項を a，公比を r とすると　　$a_n=ar^{n-1}$

第 4 項が -24 であるから　　$ar^3=-24$　　……①

第 6 項が -96 であるから　　$ar^5=-96$　　……②

①，② から　　$-24r^2=-96$　　$\boxed{\text{② から } ar^3\cdot r^2=-96}$

よって　　$r^2=4$

ゆえに　　$r=\pm 2$

① から　　$r=2$ のとき $a=-3$，$r=-2$ のとき $a=3$

よって，一般項は　　$a_n=-3\cdot 2^{n-1}$　　または　　$a_n=3(-2)^{n-1}$

5 ● 等比数列の和

初項 2，公比 3，項数 6 の等比数列の和 S を求めてみよう。

$$S=2+\boxed{2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+2\cdot 3^4+2\cdot 3^5}\qquad\cdots\cdots ①$$

この両辺に公比 3 を掛けると

$$3S=\quad\boxed{2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+2\cdot 3^4+2\cdot 3^5}+2\cdot 3^6\qquad\cdots\cdots ②$$

①−② から　　$S-3S=2-2\cdot 3^6$

よって　　$S=\dfrac{2(1-3^6)}{1-3}=728$

一般に，初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=a+\boxed{ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}}\qquad\cdots\cdots ③$$

この両辺に公比 r を掛けると

$$rS_n=\quad\boxed{ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}}+ar^n\qquad\cdots\cdots ④$$

③−④ から　　$S_n-rS_n=a-ar^n$

すなわち　　$(1-r)S_n=a(1-r^n)$

よって，$r\neq 1$ のとき　　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

また，$r=1$ のとき　　$S_n=\underbrace{a+a+a+\cdots\cdots+a}_{n\text{個}}=na$

したがって，次の公式が成り立つ。

> **等比数列の和**
> 初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和を S_n とする。
> 1　$r\neq 1$ のとき　　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$
> 2　$r=1$ のとき　　$S_n=na$

例 6　(1)　初項 1，公比 2，項数 n の等比数列の和 S_n は

$$S_n=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$

(2)　初項 9，公比 -3 の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{9\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=\frac{9}{4}\{1-(-3)^n\}$$　終

例題 6

第 2 項が 3，初項から第 3 項までの和が 13 である等比数列の，初項 a と公比 r を求めよ。

解　与えられた条件から

$$ar=3\qquad\cdots\cdots ①$$
$$a+ar+ar^2=13\qquad\cdots\cdots ②$$

② から　　$a(1+r+r^2)=13$

この式の両辺に r を掛けると　　$ar(1+r+r^2)=13r$

① を代入して整理すると　　$3r^2-10r+3=0$

これを解いて　　$r=\dfrac{1}{3},\ 3$

① から　　$r=\dfrac{1}{3}$ のとき $a=9$，　$r=3$ のとき $a=1$

よって　　$a=9,\ r=\dfrac{1}{3}$　　または　　$a=1,\ r=3$

6 ◎和の記号 Σ

数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 n 項までの和を，記号 Σ を用いて

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ と書く。Σ はギリシャ文字で，シグマと読む。

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

また，$\displaystyle\sum_{k=p}^{q}a_k$ と書けば，数列 $\{a_n\}$ の第 p 項から第 q 項までの和を表す。

例 7　(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots\cdots+n$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k-2)=1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=2}^{10}3^k=3^2+3^3+3^4+\cdots\cdots+3^{10}$　　終

例 8　$\displaystyle\sum_{k=3}^{6}k^3$，　$\displaystyle\sum_{j=3}^{6}j^3$，　$\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(k+2)^3$は，いずれも和 $3^3+4^3+5^3+6^3$ を表している。　終

数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots=a_n=c$ のときは

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+\cdots\cdots+c}_{n\text{個}}=nc$$

よって　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=nc$　　　特に　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1=n$

◎ 累乗の和

自然数の数列の和 $1+2+3+\cdots\cdots+n$ について、初項 1 、公差 1 、項数 n の等差数列 の和と考えると　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$　……①　が成り立つ。

ここでは，次のような 1 から n までの自然数の 2 乗の和を求めてみよう。

$$S=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$$

この和を求めるために，恒等式 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ を利用する。

$k=1$ とすると　　$2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1$

$k=2$ とすると　　$3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1$

$k=3$ とすると　　$4^3-3^3=3\cdot 3^2+3\cdot 3+1$

…………　　　…………………

$k=n$ とすると　　$(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$

$$\begin{array}{rr}
 & \cancel{2^3}\ -1^3 \\
 & \cancel{3^3}\ -\cancel{2^3} \\
 & \cancel{4^3}\ -\cancel{3^3} \\
 & \cdots\cdots \\
+) & (n+1)^3-\cancel{n^3} \\ \hline
 & (n+1)^3-1^3
\end{array}$$

これらの n 個の等式を辺々加えると

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots\cdots+n)+n$$

① を代入して　　$(n+1)^3-1=3S+\dfrac{3}{2}n(n+1)+n$

ゆえに　$3S=(n+1)^3-1-\dfrac{3}{2}n(n+1)-n=\dfrac{1}{2}(n+1)\{2(n+1)^2-3n-2\}$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

したがって　　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

7 ●Σ公式と計算

いくつかの数列の和の公式は，Σを用いて，次のようにまとめられる。

数列の和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc \qquad \text{特に} \quad \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1), \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{r^n-1}{r-1} \quad (r \fallingdotseq 1)$$

◎Σの性質

2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ と定数 p に対して

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots\cdots+(a_n+b_n)$$
$$=(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n)$$
$$pa_1+pa_2+\cdots\cdots+pa_n = p(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$$

である。したがって，Σについて次の等式が成り立つ。

Σの性質

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} pa_k = p\sum_{k=1}^{n} a_k$ 　　p は k に無関係な定数

一般に，p，q を k に無関係な定数とするとき，次のことが成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k) = p\sum_{k=1}^{n} a_k + q\sum_{k=1}^{n} b_k$$

Σの性質や数列の和の公式を利用すると，次のような和が求められる。

例 9
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 2n\\ &= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-9(n+1)+12\}\\ &= \frac{1}{6}n(2n^2-6n+4)\\ &= \frac{1}{3}n(n-1)(n-2)\end{aligned}$$
終

例題7　次の和を求めよ。

$$1^2\cdot2+2^2\cdot3+3^2\cdot4+\cdots\cdots+n^2(n+1)$$

解　この和は，第 k 項が $k^2(k+1)$ である数列の，初項から第 n 項までの和であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1) &= \sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} k^2\\ &= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\ &= \frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)+2(2n+1)\}\\ &= \frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+7n+2)\\ &= \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)\end{aligned}$$

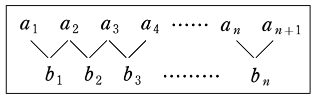
8 ● 階差数列

◎ 階差数列

数列 $\{a_n\}$ の隣り合う2つの項の差

$b_n = a_{n+1} - a_n$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$



を項とする数列 $\{b_n\}$ を，数列 $\{a_n\}$ の **階差数列** という。

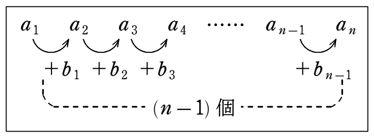
例 10　数列　1，4，9，16，25，36，…… の階差数列は

3，5，7，9，11，……

となり，初項3，公差2の等差数列である。　終

$\{a_n\}$ の各項は、等差数列の一般項の導出と同様にして、以下のように導ける。

$$a_2 = a_1 + b_1$$
$$a_3 = a_2 + b_2 = a_1 + (b_1 + b_2)$$
$$a_4 = a_3 + b_3 = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$



（図1）

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} = a_1 + (b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+n_{n-1}) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

等差数列の一般項 a_n を求めるには、初項 a から $(n-1)$個の公差 d を足せば、第 n 項 a_n が求まるが、どんな数列 $\{a_n\}$ も階差数列を利用すれば、等差数列のときと同様の方法で、初項 a から $(n-1)$個の階差数列の項を足せば、第 n 項 a_n が求まる（図1参照）

$a_n = a+(n-1)d$ と $a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ との異なる点は $\{a_n\}$ の隣り合う2つの項の差が一定か一定でないかの違いしかない。

しっくりこない人は下のように、$a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ を導くこともできる。

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$a_2 - a_1 = b_1$$
$$a_3 - a_2 = b_2$$
$$a_4 - a_3 = b_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$$

$$\begin{aligned}\cancel{a_2} - a_1 &= b_1\\ \cancel{a_3} - \cancel{a_2} &= b_2\\ \cancel{a_4} - \cancel{a_3} &= b_3\\ &\cdots\cdots\cdots\\ +)\ a_n - \cancel{a_{n-1}} &= b_{n-1}\\ \hline a_n - a_1 &= b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{n-1}\end{aligned}$$

これらの $(n-1)$ 個の等式を辺々加えると，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n - a_1 = b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{n-1}$$

よって　$a_n = a_1 + (b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{n-1}) = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$

したがって，数列 $\{a_n\}$ とその階差数列 $\{b_n\}$ について，次のことが成り立つ。

階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$n \geqq 2$ のとき　　$a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$

階差数列を利用して，与えられた数列の一般項を求めてみよう。

例題8　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1，4，11，22，37，56，……

解　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

3，7，11，15，19，……

となり，これは初項3，公差4の等差数列である。

よって　　$b_n = 3+(n-1)\cdot4 = 4n-1$

ゆえに，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-1) = 1 + 4\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1\\ &= 1 + 4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n - (n-1)\end{aligned}$$

すなわち　　$a_n = 2n^2 - 3n + 2$　……①

初項は $a_1 = 1$ なので，①は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　　$a_n = 2n^2 - 3n + 2$

$\boxed{9}$ ●漸化式と数列

◎ 漸化式

数列 $\{a_n\}$ が次の2つの条件を満たしているとする。

[1] $a_1=1$ [2] $a_{n+1}=a_n+n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

[1] をもとにして，[2] において n を 1，2，3，…… とすると

$$a_2=a_1+1=1+1=2$$
$$a_3=a_2+2=2+2=4$$
$$a_4=a_3+3=4+3=7$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

となり，順次 a_2，a_3，a_4，…… の値がただ1通りに定まる。したがって，数列 $\{a_n\}$ は上の2つの条件 [1]，[2] によって定められる。

上の式 [2] のように，数列において，その前の項から次の項をただ1通りに定める規則を示す等式を **漸化式** という。今後，特に断りがない場合は，漸化式は $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ で成り立つものとする。

例題 10 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第4項を求めよ。

$$a_1=3, \quad a_{n+1}=2a_n-1$$

解 $a_2=2a_1-1=2\cdot3-1=5$

$a_3=2a_2-1=2\cdot5-1=9$

よって $a_4=2a_3-1=2\cdot9-1=17$

$\boxed{10}$ ●漸化式の基本形

初項と漸化式で定められる数列の一般項を求めることを考えよう。

◎ $a_{n+1}=a_n+d$（等差型），$a_{n+1}=ra_n$（等比型）の漸化式

既に学んだ等差数列と等比数列は，次の条件によって定められる。

初項 a，公差 d の等差数列は $a_1=a$，$a_{n+1}=a_n+d$

初項 a，公比 r の等比数列は $a_1=a$，$a_{n+1}=ra_n$

◎ $a_{n+1}=a_n+(n$ の式）（階差型）の漸化式

漸化式が $a_{n+1}=a_n+(n$ の式$)$ の形のとき，階差数列を利用する方法で，一般項が求められることがある。

例題 11 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=3, \quad a_{n+1}=a_n+2^n$$

解 条件より $a_{n+1}-a_n=2^n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が 2^n であるから，

$n\geqq2$ のとき $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=3+\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$

よって $a_n=2^n+1$

初項は $a_1=3$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は $a_n=2^n+1$

◎ $a_{n+1}=pa_n+q$（特性型）の漸化式

p，q は定数で，$p\neq0$，$p\neq1$ とする。数列 $\{a_n\}$ について，漸化式

$$a_{n+1}=pa_n+q \quad \cdots\cdots ①$$

と初項 a_1 が与えられたとき，一般項 a_n を求める方法を考えよう。

① に対して，等式

$$c=pc+q \quad \cdots\cdots ②$$

を満たす定数 c を考える。①−② から

$$a_{n+1}-c=p(a_n-c)$$

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=pa_n+q \\ -) & \quad\ \ c=pc\ \ +q \\ \hline & a_{n+1}-c=p(a_n-c) \end{array}$$

よって，数列 $\{a_n-c\}$ は初項 a_1-c，公比 p の等比数列であり，このことを利用して，一般項 a_n が求められる。

このとき、②を漸化式①の**特性方程式**という。

例えば，漸化式 $a_{n+1}=3a_n+2$ は，$c=3c+2$ を満たす定数 $c=-1$ を用いて，$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$ と変形することができる。このことを利用して，次の問題を考えてみよう。

例題 12 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1, \quad a_{n+1}=3a_n+2$$

解 $a_{n+1}=3a_n+2$ を変形すると $a_{n+1}+1=3(a_n+1)$

ここで，$b_n=a_n+1$ とおくと

$b_{n+1}=3b_n$，$b_1=a_1+1=1+1=2$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 2，公比 3 の等比数列で

$b_n=2\cdot3^{n-1}$

$a_n=b_n-1$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=2\cdot3^{n-1}-1$