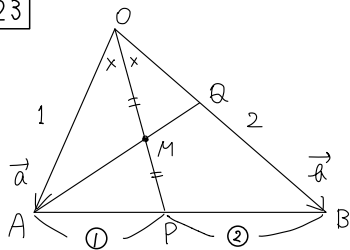


23



(1) $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とする。

OP は $\angle AOB$ の二等分線より、

AP : PB = 1 : 2 である。

よって、

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \frac{1}{2} \vec{OP} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} \right) \\ &= \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b}\end{aligned}$$

Q は直線 AM 上より、

$$\begin{aligned}\vec{OQ} &= (1-s) \vec{OA} + s \vec{OM} \\ &= (1-s) \vec{a} + s \left(\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b} \right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}s \right) \vec{a} + \frac{1}{6} s \vec{b}\end{aligned}$$

とおく。

Q は辺 OB 上より、

$$1 - \frac{2}{3}s = 0 \quad \therefore s = \frac{2}{3}$$

よって、 $\vec{OQ} = \frac{1}{4} \vec{b}$ より、

$$\begin{aligned}\vec{MQ} &= \vec{OQ} - \vec{OM} \\ &= \frac{1}{4} \vec{b} - \left(\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b} \right) \\ &= -\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{12} \vec{b}\end{aligned}$$

$$\therefore s = -\frac{1}{3}, t = \frac{1}{12}$$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 \cos 30^\circ = \sqrt{3}$

(1) より、

$$\begin{aligned}|\vec{MQ}| &= \left| -\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{12} \vec{b} \right| \\ &= \frac{1}{12} \left| -4\vec{a} + \vec{b} \right|\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}|-4\vec{a} + \vec{b}|^2 &= 16|\vec{a}|^2 - 8\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 16 \cdot 1 - 8\sqrt{3} + 4 \\ &= 20 - 8\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{よって、} |-4\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{20 - 8\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{5 - 2\sqrt{3}} \quad \text{より、}\end{aligned}$$

$$|\vec{MQ}| = \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}{6}$$