12-1

[1]
定義に従って $f(x)=x^3-2x$ の $x=1$ における微分係数を求めよ。

[2]
(1) 微分可能な関数 $f(x)$ に対して、関数 $g(x)=xf(x)$ を考える。
$g'(x)=xf'(x)+f(x)$ となることを、導関数の定義に従って示せ。
(2) $(x^n)'=nx^{n-1}$ (n は自然数)となることを数学的帰納法を用いて示せ。

☆導関数 $f'(x)$ の定義　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\boxed{\text{解答}}$

(1) $g(x)=xf(x)$ より.

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)f(x+h)-xf(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{xf(x+h)+hf(x+h)-xf(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x(f(x+h)-f(x))+hf(x+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(x\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x+h)\right)$$
$$=xf'(x)+f(x)$$ ▨

(2) $(x^n)'=nx^{n-1}$ …(＊) が すべての自然数 n について成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき、

$$(x^1)'=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}1=1=1\cdot x^0$$

よって、$n=1$ のとき、(＊)は成り立つ

(ii) $n=k$ のとき、

(＊)が成り立つと仮定すると、$(x^k)'=kx^{k-1}$

このとき、

$$(x^{k+1})'=(x\cdot x^k)'$$
$$=x(x^k)'+x^k\quad(\because (1))$$
$$=x\cdot kx^{k-1}+x^k$$
$$=kx^k+x^k$$
$$=(k+1)x^{k+1}$$

よって、$n=k+1$ のとき、(＊)は成り立つ

(i), (ii) より、すべての自然数 n について、(＊)は成り立つ ▨